

# ODREĐIVANJE GRANIČNOG OPTEREĆENJA STATIČKI NEODREĐENIH REŠETKASTIH NOSAČA

Žarko Petrović<sup>1</sup>,  
Bojan Milošević<sup>2</sup>,  
Branko Popović<sup>3</sup>

UDK: 624.042.2 : 624.072.22

**Rezime:** U radu je prikazan postupak proračuna graničnog opterećenja elasto-plastičnih rešetkastih nosača izloženih dejstvu proporcionalog opterećenja koje se postepeno povećava sve do formiranja mehanizma loma. Proračun je baziran na primeni statičke i kinematičke teoreme granične analize koje predstavljaju osnovu granične analize konstrukcija kojima se na brz i efikasan način dolazi do veličine graničnog opterećenja. Primena ovih teorema je prikazana na primerima rešetkastih nosača opterećenih jedno i dvoparametarskim opterećenjem.

**Ključne reči:** Granično opterećenje, statička teorema, kinematička teorema.

## 1. UVOD

Kada je opterećenje koje deluje na konstrukciju proporcionalnog karaktera i postepeno raste, u nekom trenutku ono dostiže određenu, kritičnu, vrednost kada se javlja plastični lom konstrukcije (t.j. neograničeno povećanje deformacija pri konstantnom opterećenju) nakon čega konstrukcija više nije u stanju da primi dalji prirast opterećenja. To kritično stanje se naziva granično stanje konstrukcije a opterećenje koje ga izaziva je granično opterećenje. Određivanje moći nošenja konstrukcije (graničnog opterećenja) je značajan faktor u projektovanju rešetkastih nosača.

Granična analiza konstrukcija je alternativni analitički postupak kojim se određuje maksimalni sigurni parametar opterećenja ili parametar uvećanja opterećenja, koji jedna idealno elasto – plastična konstrukcija može da ponese. U poređenju sa inkrementalnom analizom (metoda korak po korak), efikasnost u graničnoj analizi je postignuta tako što se posmatra konačno stanje, stanje loma, bez obraćanja pažnje na to šta se dešavalo sa konstrukcijom i opterećenjem od trenutka formiranja prvog plastičnog zgloba ili prvog plastičnog štapa pa sve do loma. Metode granične analize su bazirane na teoremama plastičnog loma za idealno elasto – plastična tela. Ove teoreme poznate su kao donja (statička) i gornja (kinematička) teorema granične analize konstrukcija.

<sup>1</sup> Žarko Petrović, dipl. ing. građ., Građevinsko – arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu, A. Medvdeva 14, 018/588200, e – mail: [zarko@gaf.ni.ac.rs](mailto:zarko@gaf.ni.ac.rs)

<sup>2</sup> Bojan Milošević, dipl. ing. građ., Tehnička škola “23 maj” u Pančevu, B. Jovanovića 89, tel:013/318977, Visoka Arhitektonsko Urbanistička Škola u Pančevu, M.Pijade 19, e-mail: [prodic\\_80@yahoo.com](mailto:prodic_80@yahoo.com)

<sup>3</sup> Branko Popović, dr, redovni profesor, Građevinsko – arhitektonski fakultet u Nišu, A. Medvdeva 14, 018/588200.

Treba napomenuti da pored graničnog stanja nosivosti postoje i druga granična stanja, koja mogu nastupiti pre stanja granične ravnoteže i koja u pogledu prenošenja spoljnog opterećenja mogu biti ograničavajuća, kao što su granično stanje upotrebljivosti, ili čak granično stanje prslina u konstrukcijama od armiranog ili prethodno napregnutog betona [1]. Da bi se granična nosivost jedne konstrukcije utvrdila primenom teorije plastičnosti, prethodno treba dokazati da će za nju merodavno granično stanje nastati formiranjem mehanizma loma, tj. treba eliminisati pojavu bilo kog drugog graničnog stanja i isključiti pojavu bilo kojih efekata koji bi doveli do loma konstrukcije pre obrazovanja dovoljnog broja plastičnih zglobova ili plastičnih štapova.

Iako su se neke ideje javile u 18 – om veku, granična analiza je novijeg datuma. Početak se vezuje za Kazinczy – ja (1914), koji je sračunao opterećenje loma kod obostrano uklještene grede i taj rezultat potvrdio eksperimentalno. Sličan koncept su predložili i Kist (1917, 1920) i Grüning (1926). Međutim, rani radovi iz ove oblasti su se u mnogome oslanjali na inženjersku intuiciju. Iako je statičku teoremu prvi predložio Kist (1917) kao jedan intuitivni aksiom ipak se smatra da je osnovne teoreme granične analize najpre izneo Gvozdev 1936 god. koji ih je objavio dve godine kasnije na lokalnoj ruskoj konferenciji ali su one ostale nezapažene od strane zapadnih autora sve do 1960. god. kada ih je preveo i objavio Haythornthwaite. U međuvremenu, formalni dokaz ovih teorema za grede i ramove je izneo Horne (1949) kao i Greenberg i Prager (1951).

## 2. O GRANIČNOJ ANALIZI REŠETKASTIH NOSAČA

Graničnim stanjem preseka štapa nazivamo takvo stanje pri kome je povećanje bilo koje unutrašnje sile u preseku fizički nemoguće, ili je ono moguće, ali je ograničeno nekim drugim pretpostavkama i zahtevima. U prvom slučaju granično stanje zavisi samo od fizičkih svojstava materijala, u drugom ne samo od svojstava materijala već i od zahteva koji se postavljaju u svakom konkretnom slučaju [1].

Fizička svojstva materijala uvode se u račun preko usvojenog oblika dijagrama. Naravno, reč je o idealizovanim  $\sigma - \varepsilon$  dijagramima. Dijagram koji odgovara idealno elasto-plastičnom materijalu (sl.1a), koji se najviše primenjuje kod proračuna prema graničnoj ravnoteži, ne uzima u obzir očvršćavanje materijala. Međutim, istraživanja pokazuju da zanemarenje fenomena ojačanja materijala ne unosi značajne greške, posebno ako materijal ima veliku površinu tečenja jer kod takvih materijala očvršćavanje nastupa tek pošto je nosivost preseka gotovo potpuno iscrpljena.

Dijagrami  $\sigma - \varepsilon$  opisuju ponašanje na nivou materijalne tačke. Konstruktivna analiza konstrukcija kao što su rešetke, grede, ramovi i roštilji zahtevaju poznavanje relacija između unutrašnjih sila i odgovarajućih generalisanih deformacija. Na primer, ponašanje štapa rešetke je određeno silom u štapu  $S$ , koja zavisi od promene dužine štapa  $\Delta l$ . U elastičnoj oblasti, Hukov zakon  $\sigma = E\varepsilon$  u kombinaciji sa poznatim relacijama  $\sigma = S/A$  i  $\varepsilon = \Delta l/l$  rezultuju relacijom:

$$S = \frac{EA}{l} \Delta l \quad (1)$$

gde je  $A$  površina poprečnog preseka štapa a  $l$  je dužina štapa. Kada napon u štapu dostigne vrednost napona tečenja  $\sigma_T$ , štap počinje da teče i napon više ne može da raste. Sila u štapu kod koga je došlo do plastifikacije nije određena uslovima ravnoteže već uslovom loma, tako da se može smatrati poznatom ukoliko su poznate geometrijske i fizičke karakteristike štapa [2]. Sila u "plastičnom" štapu ostaje konstantna i jednaka sili pune plastičnosti preseka (2). Slično razmišljanje se može sprovesti i u slučaju pritiska.

$$S_p = A\sigma_T \quad (2)$$

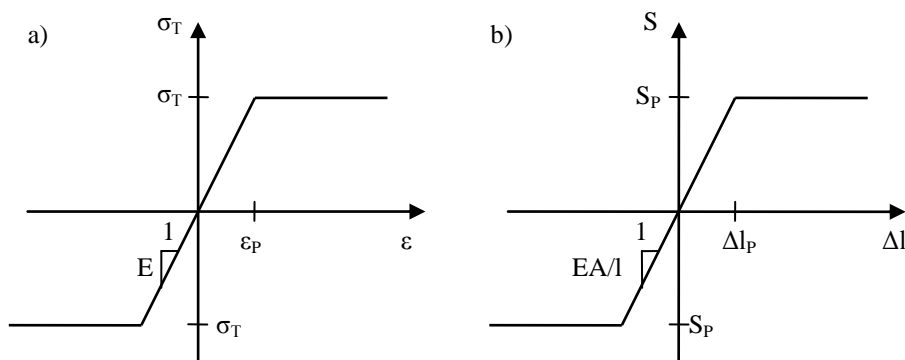
Na osnovu preporuka u EUROCODE 5, dozvoljeni napon kod pritisnutih štapova ( $\sigma_{ii}$ ) se može sračunati redukcijom napona tečenja prema izrazu (3) a sila pune plastičnosti pritisnutih štapova izrazom (5).

$$\sigma_{ii} = \varphi\sigma_T \quad (3)$$

$$\varphi = \beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{b^2}{\lambda^2}} \quad \beta = \frac{1 + a\left(\frac{\lambda}{b} - 0.2\right) + \left(\frac{\lambda}{b}\right)^2}{2\left(\frac{\lambda}{b}\right)^2} \quad (4)$$

$$S_p^- = A\sigma_{ii} \quad (5)$$

Ovde je  $\lambda$  vitkost štapova koja se može sračunati na uobičajeni način. Konstante  $a$  i  $b$  zavise od oblika poprečnog preseka štapa i osobina materijala od koga je nosač izrađen.



Slika 1 – a)  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagram za idealno elasto-plastičan materijal, b) odgovarajući  $S$ - $\Delta l$  dijagram

Kako je napon u štapu rešetkastog nosača konstantan, tečenje počinje jednovremeno u svim tačkama štapa. Striktno govoreći, ovo važi u idealnom slučaju, štapa sa idealnim poprečnim presekom, napravljenim od idealno homogenog materijala itd. Usled neizbežnih geometrijskih i materijalnih nepravilnosti, tečenje počinje u najkritičnijoj tački, ali se zona plastičnosti ubrzo proširi na, najmanje jedan ceo poprečni presek, tako da pretpostavka o konstantnoj sili u štapu na početku tečenja ostaje opravdana.

Sila u štapu u kome je došlo do plastifikacije ostaje konstantna, a dalji prirast opterećenja mora biti uravnotežen silama u štapovima koji ostaju u elastičnoj oblasti. Ovo znači da se konstrukcija ponaša, pri daljem povećanju opterećenja, kao da štap u kome je došlo do plastifikacije ne postoji [3].

Ako je konstrukcija statički određena, odmah nakon formiranja prvog plastičnog štapa dolazi do pojave mehanizma loma, tako da se lom javlja na granici elastičnog ponašanja konstrukcije. Međutim, ukoliko je stepen statičke neodređenosti konstrukcije  $r \geq 1$ , nakon početka tečenja u jednom štapu, stepen statičke neodređenosti postaje  $r-1$ , tako da konstrukcija još uvek može da ponese dodatno opterećenje. Lom nastaje kada u  $r+1$  štapova dođe do plastifikacije kada konstrukcija prelazi u mehanizam sa jednim stepenom slobode. Lom se može javiti i kada je u manje od  $r+1$  štapova došlo do plastifikacije, u slučaju formiranja parcijalnog mehanizma. U tom slučaju, deo rešetke ostaje statički neodređen, ali jedan ili više čvorova se mogu pomerati bez promene dužine bilo kog štapa koji i dalje rade u elastičnoj oblasti.

### 3. TEOREME GRANIČNE ANALIZE

#### 3.1. Statička teorema

Generalno, postoji mnogo raspodela sila u štapovima kod statički neodređenog rešetkastog nosača koji zadovoljavaju uslove ravnoteže zajedno sa datim spoljašnjim opterećenjem. Greenberg i Prager su ovakvu raspodelu nazvali statički mogućom. Pored toga, raspodela sila u štapovima pri kojoj se nigde u nosaču ne javlja sila veća od sile pune plastičnosti preseka, naziva se sigurnom. Neophodan uslov da bi rešetkasti nosač mogao da nosi zadati skup opterećenja je, očigledno, postojanje makar jedne sigurne raspodele sila u nosaču koja je i statički moguća za dato spoljašnje opterećenje. Statičkom teoremom se tvrdi da je ovaj uslov dovoljan da nosač može da nosi zadato opterećenje.

Radi formalne interpretacije ove teoreme, pretpostavlja se da je nosač izložen dejstvu sila  $\mu P_1, \mu P_2, \dots, \mu P_n$ , gde se sile  $P_1, P_2, \dots, P_n$  smatraju fiksnim, nepromenljivim vrednostima a  $\mu$  je parametar opterećenja kojom se te sile uvećavaju do loma. Opterećenje je u potpunosti definisano vrednošću parametra  $\mu$ , i može se smatrati skupom opterećenja  $\mu$ . Parametar opterećenja koji izaziva pojavu plastičnog loma je obeležen sa  $\mu_c$  i naziva se parametar opterećenja loma.

*Ako postoji bilo koja raspodela sila u štapovima rešetkastog nosača koji je izložen dejstvu spoljašnjeg opterećenja definisanim skupom opterećenja  $\mu$  i ako je ta raspodela sigurna i statički moguća, vrednost parametra  $\lambda$  mora biti manja ili jednaka od vrednosti parametra opterećenja loma  $\mu_c$  [4].*

Posledica gore izložene statičke teoreme je da ako se za dati skup opterećenja  $\mu$  može pokazati da ne postoji niti jedna raspodela sila u štapovima koja je i sigurna i statički moguća, vrednost parametra  $\mu_s$  mora biti veća od vrednosti parametra opterećenja loma.

### 3.2. Kinematička teorema

Kinematička teorema, ili teorema o gornjoj granici opterećenja loma (graničnog opterećenja), odnosi se na mehanizam loma. Mehanizmom nazivamo kinematički labilan sistem, u koji prelazi nosač umetanjem plastičnih zglobova ili plastičnih štapova (u slučaju rešetkastih nosača) tamo gde za to postoje uslovi. Svakom mehanizmu odgovara jedan parametar opterećenja  $\mu$  u slučaju kada je opterećenje jednoparametarsko, odnosno, jedna prava u dijagramu interakcije kada je opterećenje dvo ili više parametarsko. Veličina tog parametra dobija se posredstvom principa virtualnih pomeranja definisanim izrazom:

$$\sum P_i \cdot \delta_i = 0 \quad (6)$$

U uslovima granične ravnoteže, mehanizam je opterećen spoljašnjim silama i koncentrisanim silama  $S_p$ , kao spoljnim opterećenjem u čvorovima na krajevima štapova u kojima je došlo do plastifikacije. Rad sila u štapovima je jednak nuli, pa se princip virtualnih sila svodi samo na rad spoljašnjih sila koji mora biti jednak nuli. Jasno je, da u spoljašnje sile treba ubrajati i reakcije oslonaca. Međutim, pokazano je da, eventualno pomeranje oslonaca, odnosno rad reakcija oslonaca na pomeranjima istih, u stanju granične ravnoteže nema uticaja na veličinu parametra graničnog opterećenja [1]. Prema tome, parametar opterećenja  $\mu$  koji odgovara određenom mehanizmu, dobija se izjednačavajući rad spoljašnjih sila na mogućim pomeranjima mehanizma, sa radom sila  $S_p$  koji se apsorbuje u plastičnim štapovima mehanizma. Na taj način se dobija niz vrednosti parametra  $\mu$  koji odgovaraju pojedinim mehanizmima loma te kinematičku teoremu možemo definisati na sledeći način:

*Za nosač koji je izložen dejstvu skupa opterećenja  $\mu$ , vrednost parametra  $\mu$  koji odgovara bilo kom pretpostavljenom mehanizmu mora biti veći ili jednak vrednosti parametra opterećenja loma  $\mu_C$ . Ako su vrednosti parametra  $\mu_K$  određene za sve moguće mehanizme loma, stvarna vrednost parametra opterećenja loma  $\mu_C$  biće najmanja od ovih vrednosti [4].*

### 3.3. Teorema jedinstvenosti

Statička i kinematička teorema zajedno formiraju teoremu jedinstvenosti. Tako, statičkom teoremom se tvrdi da za bilo koju vrednost parametra opterećenja  $\mu$  iznad vrednosti parametra opterećenja loma  $\mu_C$  ne postoji niti jedna raspodela sila u štapovima koja je sigurna i statički moguća. Pored toga, kinematičkom teoremom se tvrdi da ne postoji niti jedan mehanizam kod koga je odgovarajući parametar opterećenja  $\mu$  manji od parametra opterećenja loma  $\mu_C$ , na osnovu čega možemo definisati teoremu jedinstvenosti:

*Ako za dati nosač koji je izložen dejstvu skupa opterećenja  $\mu$ , postoji najmanje jedna sigurna i statički moguća raspodela sila u štapovima pri kojoj se javlja dovoljan broj sila pune plastičnosti u štapovima kako bi se formirao mehanizam, odgovarajući parametar opterećenja biće stvarni parametar opterećenja  $\mu_C$  [4].*

#### 4. LINEARNO PROGRAMIRANJE U GRANIČNOJ ANALIZI

Na osnovu statičke teoreme granične analize, raspodela sila u štapovima pri lomu je takva da je odgovarajući parametar opterećenja loma najveći statički moguć parametar, takav da su zadovoljeni uslovi ravnoteže i uslov plastičnosti. Ovo je problem linearnog programiranja koji se može iskazati na sledeći način [5].

Naći  $\mu \rightarrow \max$ , pri sledećim uslovima:

$$B \cdot s = \mu \cdot f \quad (7)$$

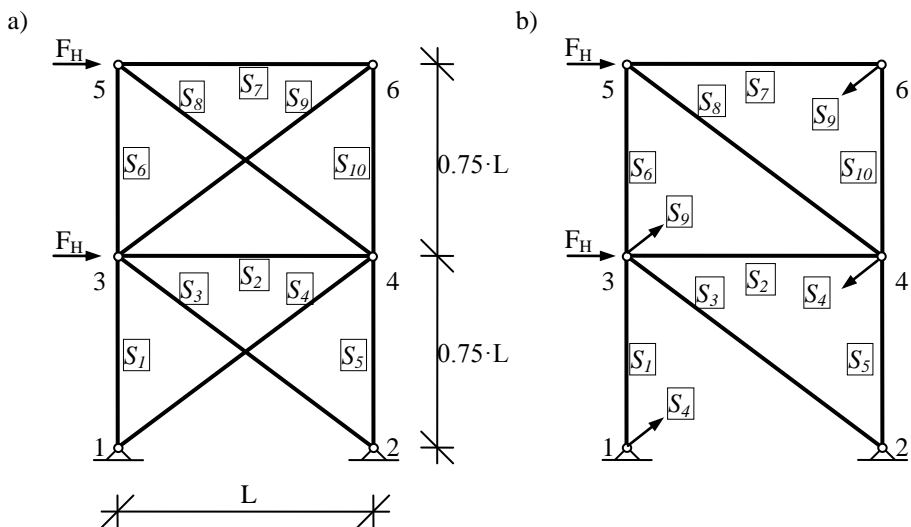
$$-S_{p,i} \leq S_i \leq S_p \quad (8)$$

$B$  - statička matrica koja daje vezu između sila u štapovima i spoljašnjeg opterećenja  
 $s$  - vektor nepoznatih sila u štapovima  
 $f$  - vektor spoljašnjeg opterećenja

#### 5. PRIMERI

**Primer 1.** Određivanje graničnog opterećenja primenom statičke teoreme – metoda nejednačina

Rešetkasti nosač prikazan na sl.2a je opterećen jednoparametarskim opterećenjem. Usvojena je ista vrednost napona tečenja kako pri pritisku tako i pri zatezanju. Sila pune plastičnosti štapova  $S_1, S_2, \dots, S_5$  je  $2S_p$ , dok je  $S_p$  sila pune plastičnosti štapova  $S_6, S_7, \dots, S_{10}$ .



Slika 2 – a) rešetkasti nosač opterećen dvo – parametarskim opterećenjem, b) izabran osnovni sistem i statički nezavisne veličine

Svako statički moguće polje sila može biti predstavljeno u funkciji opterećenja i sila u štapovima  $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ , zadovoljavajući  $m$  nezavisnih uslova ravnoteže.

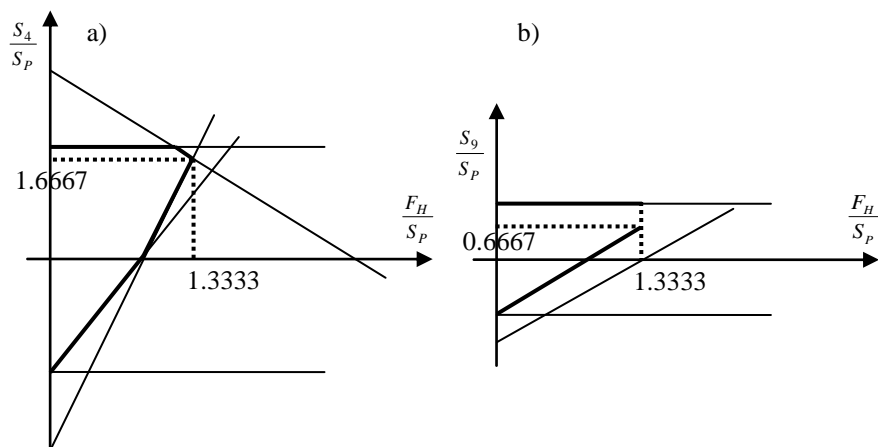
Na sl.2b je prikazan izabran osnovni sistem i statički nezavisne veličine  $S_4$  i  $S_9$ . Sve sile u štapovima su određene iz uslova ravnoteže čvorova 3-6 a u funkciji su spoljašnjeg opterećenja i izabranih statički nezavisnih veličina  $S_4$  i  $S_9$ . Na taj način je zadovoljen uslov postojanja statički mogućeg polja sila. Korišćenjem izraza (8) kojim je definisan uslov plastičnosti, odnosno postojanja sigurnog statički mogućeg polja sila, problem određivanja graničnog opterećenja je problem određivanja maksimalnog parametra opterećenja loma  $\mu=F_H$  koji zadovoljava sistem nejednačina (9).

$$\begin{aligned}
 -2S_{P,1} &\leq 2.25 \cdot F_H - 0.6 \cdot S_4 \leq 2S_{P,1} \\
 -2S_{P,2} &\leq F_H - 0.8 \cdot S_4 - 0.8 \cdot S_9 \leq 2S_{P,2} \\
 -2S_{P,3} &\leq -2.5 \cdot F_H + S_4 \leq 2S_{P,3} \\
 -2S_{P,4} &\leq S_4 \leq 2S_{P,4} \\
 -2S_{P,5} &\leq -0.75 \cdot F_H - 0.6 \cdot S_4 \leq 2S_{P,5} \\
 -S_{P,6} &\leq 0.75 \cdot F_H - 0.6 \cdot S_9 \leq S_{P,6} \\
 -S_{P,7} &\leq -0.8 \cdot S_9 \leq S_{P,7} \\
 -S_{P,8} &\leq -1.25 \cdot F_H + S_9 \leq S_{P,8} \\
 -S_{P,9} &\leq S_9 \leq S_{P,9} \\
 -S_{P,10} &\leq -0.6 \cdot S_9 \leq S_{P,10}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Sistem nejednačina (9) je prostorni problem koji je rešen grafički posmatrajući dva nezavisna sistema nejednačina. Sistem nejednačina (9.1) koji obuhvata nejednačine u sistemu (9) u kojima se kao nepoznate javljaju  $\mu$  i  $S_4$  i sistem nejednačina (9.2) u kojem se kao nepoznate javljaju  $\mu$  i  $S_9$  tako da je prostorni problem rešenja sistema (9) rešen kroz dva nezavisna problema u ravni (sl.3). Druga nejednačina u sistemu (9) je jedina koja nije obuhvaćena nejednačinama (9.1) i (9.2) ali kako je i ona zadovoljena vrednostima (10) to te vrednosti predstavljaju rešenje sistema (9). Koristeći dobijene vrednosti za  $\mu=F_H$ ,  $S_4$  i  $S_9$  (10) i izraze (9) dobijene su i vrednosti ostalih sila u štapovima (11) u trenutku formiranja mehanizma loma.

$$\begin{aligned}
 -2 &\leq 2.25 \cdot \frac{F_H}{S_P} - 0.6 \cdot \frac{S_4}{S_P} \leq 2 \\
 -2 &\leq -2.5 \cdot \frac{F_H}{S_P} + \frac{S_4}{S_P} \leq 2 \\
 -2 &\leq \frac{S_4}{S_P} \leq 2 \\
 -2 &\leq -0.75 \cdot \frac{F_H}{S_P} - 0.6 \cdot \frac{S_4}{S_P} \leq 2
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq 0.75 \cdot \frac{F_H}{S_P} - 0.6 \cdot \frac{S_9}{S_P} \leq 1 \\
 -1 &\leq -1.25 \cdot \frac{F_H}{S_P} + \frac{S_9}{S_P} \leq 1 \\
 -1 &\leq \frac{S_9}{S_P} \leq 1
 \end{aligned}
 \tag{9.2}$$



Slika 3 – Grafičko rešenje sistema nejednačina a) 9.1 b) 9.2

$$\begin{aligned}
 \mu &= 1.3333 \cdot S_P \\
 S_4 &= 1.6667 \cdot S_P \\
 S_9 &= 0.6667 \cdot S_P
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

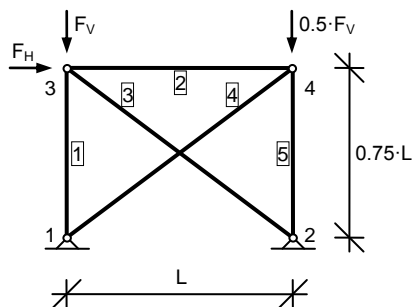
$$\begin{aligned}
 S_1 &= 2S_P \\
 S_2 &= -0.5333S_P \\
 S_3 &= -1.6667S_P \\
 S_5 &= -2S_P \\
 S_6 &= 0.60S_P \\
 S_7 &= -0.5333S_P \\
 S_8 &= -S_P \\
 S_{10} &= -0.40S_P
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Kao što se vidi na osnovu dobijenih vrednosti za sile u štapovima  $S_1$  ( $2S_P$ ),  $S_5$  ( $-2S_P$ ) i  $S_8$  ( $-S_P$ ) u tim štapovima se javila sila pune plastičnosti čime je formiran mehanizam loma, tako da je tvrdnja da je vrednost parametra opterećenja loma  $\mu=1.3333 \cdot S_P$  i potvrđena.



**Primer 2.** Određivanje graničnog opterećenja primenom kinematičke teoreme

Rešetkasti nosač prikazan na sl.4 je opterećen dvoparametarskim opterećenjem. Usvojena je ista vrednost napona tečenja kako pri pritisku tako i pri zatezanju. Sila pune plastičnosti štapova  $S_1, S_2, \dots, S_5$  je  $S_p$ .



Slika 4 – Rešetkasti nosač opterećen dvoparametaraskim opterećenjem

Primenom principa virtualnih pomeranja (6) na mogućim mehanizmima prikazanim na sl.5 određene su vrednosti opterećenja koja bi izazvala pretpostavljene mehanizme.

$$1) \quad \begin{aligned} F_H \cdot u - F_V \cdot v &= S_1 \cdot v + S_2 \cdot u \\ F_H \cdot 0.75 - F_V &= 1.75 \cdot S_p \end{aligned} \quad (12.1)$$

$$2) \quad \begin{aligned} F_V \cdot v &= S_1 \cdot \delta_1 + S_3 \cdot \delta_3 \\ F_V &= 1.60 \cdot S_p \end{aligned} \quad (12.2)$$

$$3) \quad \begin{aligned} F_H \cdot u - F_V \cdot v &= S_1 \cdot \delta_1 + S_4 \cdot \delta_4 \\ F_H \cdot 0.75 - F_V &= 2.13333 \cdot S_p \end{aligned} \quad (12.3)$$

$$4) \quad \begin{aligned} F_H \cdot u - F_V \cdot v + 0.5 \cdot F_V \cdot v &= S_1 \cdot \delta_1 + S_5 \cdot \delta_5 \\ F_H \cdot 0.75 - 0.5 \cdot F_V &= 2 \cdot S_p \end{aligned} \quad (12.4)$$

$$5) \quad \begin{aligned} F_H \cdot u &= S_2 \cdot \delta_2 + S_3 \cdot \delta_3 \\ F_H &= 1.80 \cdot S_p \end{aligned} \quad (12.5)$$

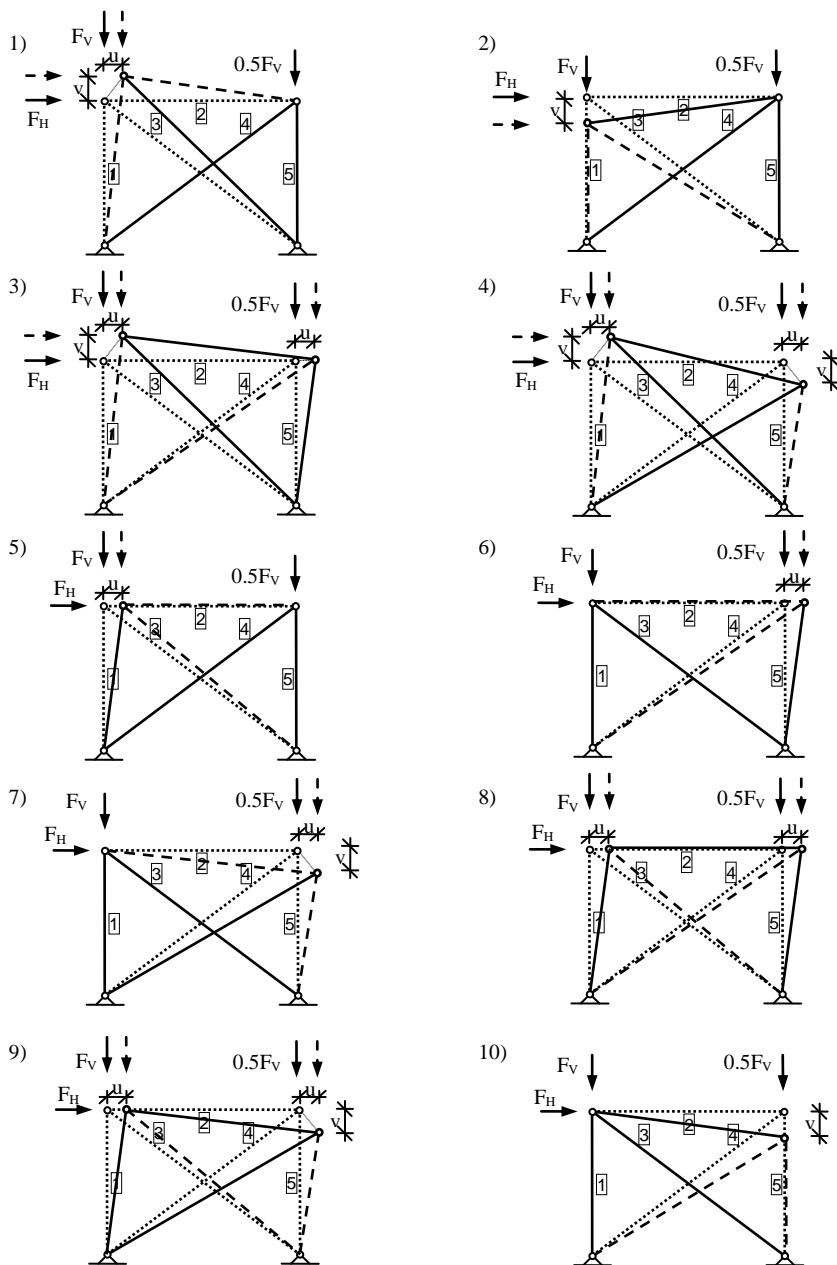
$$6) \text{ spoljašnje opterećenje ne vrši rad tako da taj mehanizam nije moguć} \quad (12.6)$$

$$7) \quad \begin{aligned} 0.5 \cdot F_V \cdot v &= S_2 \cdot \delta_2 + S_5 \cdot \delta_5 \\ F_V &= 3.5 \cdot S_p \end{aligned} \quad (12.7)$$

$$8) \quad \begin{aligned} F_H \cdot u &= S_3 \cdot \delta_3 + S_4 \cdot \delta_4 \\ F_H &= 1.60 \cdot S_p \end{aligned} \quad (12.8)$$

$$9) \quad \begin{aligned} F_H \cdot u + 0.5 \cdot F_V \cdot v &= S_3 \cdot \delta_3 + S_5 \cdot \delta_5 \\ F_H + 0.66667 \cdot F_V &= 2.13333 \cdot S_p \end{aligned} \quad (12.9)$$

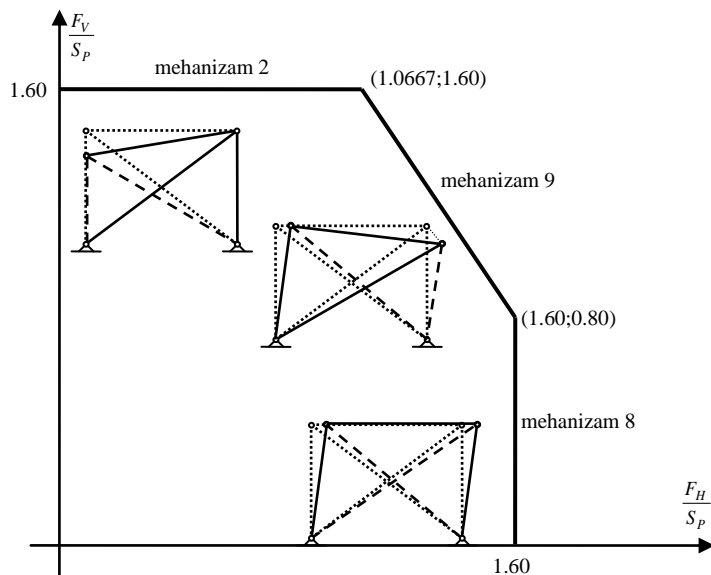
$$10) \quad \begin{aligned} 0.5 \cdot F_V \cdot v &= S_4 \cdot \delta_4 + S_5 \cdot \delta_5 \\ F_V &= 3.2 \cdot S_p \end{aligned} \quad (12.10)$$



..... Početni položaj nosača  
 — Štapovi koji rade u elastičnoj oblasti pri formiranju mehanizma  
 - - Plastični štapovi

Slika 5 – Mehanizmi loma

Korišćenjem izraza 12.1-12.10 konstruisan je dijagram interakcije na sl.6.



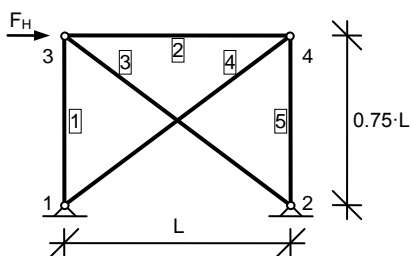
Slika 6 – Dijagram interakcije

Svaka prava na dijagramu interakcije predstavlja jedan mogući mehanizam.

1. Mehanizam 2 koji se formira pri  $F_V = 1.60 \cdot S_P$ ;  $F_H < 1.0667 \cdot S_P$
2. Mehanizam 9 koji se formira pri  $\frac{F_H}{S_P} + \frac{2}{3} \cdot \frac{F_V}{S_P} = 2.1333$
3. Mehanizam 8 koji se formira pri  $F_H = 1.60 \cdot S_P$ ;  $F_V < 0.80 \cdot S_P$

U preseku dveju pravih je kombinacija opterećenja koja dovodi do formiranja mehanizma sa  $r+2$  plastičnih štapova. Na dijagramu nisu prikazani svi mehanizmi jer pre formiranja tih mehanizama dolazi do formiranja nekog od prikazanih mehanizama na dijagramu.

**Primer 3.** Određivanje graničnog opterećenja primenom linearnog programiranja



Slika 7 – Rešetaksti nosač opterećen jednoparametaraskim opterećenjem

Rešetkasti nosač prikazan na sl.7 je opterećen jednoparametarskim opterećenjem. Usvojena je ista vrednost napona tečenja kako pri pritisku tako i pri zatezanju. Sila pune plastičnosti štapova  $S_1, S_2, \dots, S_5$  je  $S_P$ .

$$\mu = F_H$$

Problem linearnog programiranja je odrediti maksimum funkcije  $f(s, \mu) \equiv \mu$  pri kojem su zadovoljeni uslovi (7) i (8).

$$\max f(s, \mu) \equiv \mu \Rightarrow \min \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ -\mu \end{bmatrix} \min \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -0,8 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -S_P \\ -S_P \\ -S_P \\ -S_P \\ -S_P \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ \mu \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} S_P \\ S_P \\ S_P \\ S_P \\ S_P \\ 10 \cdot S_P \end{bmatrix}$$

Korišćenjem simpleks metode dobijena je vrednost funkcije  $f(s, \mu) \equiv \mu$ , odnosno vrednost sila u štapovima u trenutku granične ravnoteže kao i vrednost parametra opterećenja loma  $\mu$ .

$$f(s, \mu) = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,60 \\ -0,80 \\ -1 \\ 1 \\ -0,60 \\ 1,60 \end{bmatrix} \cdot S_P$$

## 6. ZAKLJUČAK

U radu je prikazana primena statičke i kinematičke teoreme granične analize konstrukcija pri određivanju graničnog opterećenja statički neodređenih rešetkastih nosača. U oba slučaja posmatrano je konačno, granično stanje nosača. Problem određivanja graničnog opterećenja primenom statičke teoreme se svodi na rešavanje sistema nejednačina dok se u slučaju primene kinematičke teoreme na veoma jednostavan način, primenom principa virtualnih pomeranja na pretpostavljenim mehanizmima loma moguće odrediti vrednost graničnog opterećenja. Primena ovih teorema je prikazana na primerima rešetkastih nosača a granično opterećenje u primeru nosača opterećenog dvoparametarskim opterećenjem je prikazano na dijagramu interakcije. Osnovna prednost metoda granične analize baziranih na graničnim teoremama se ogleda u jednostavnosti i veoma brzom određivanju graničnog opterećenja. Pored metoda granične analize baziranih na graničnim teoremama prikazana je i primena linearnog programiranja pri određivanju graničnog opterećenja kao jedna od osnovnih metoda savremene granične analize konstrukcija.

## LITERATURA

- [1] Stevanović S., Popović B., Petković D.: Granična analiza konstrukcija, Univerzitet u Nišu, Građevinski fakultet, Niš, **1994**.
- [2] Lubliner J.: Plasticity Theory, University of California at Berkeley, **2006**.
- [3] Jirásek M., Bažant Z.P.: Inelastic Analysis of Structures, John Wiley & Sons, England, **2002**.
- [4] Neal, B.G.: The Plastic Methods of Structural Analysis, John Wiley & Sons, New York, **1977**.
- [5] Kirsh, U.: Optimum structural design, McGraw – Hill Book Company, **1981**.
- [6] Popović B., Petrović Ž., Milošević B.: "Većina i oblik zone plastičnosti i plastičnog zgloba kod proste grede opterećene jednom koncentrisanom silom ili jednakopodeljenim opterećenjem po celom rasponu sa ili bez aksijalnih sila na krajevima grede", Zbornik radova Građevinsko – arhitektonoskog fakulteta u Nišu, N°22 Niš, **2007**.
- [7] Mijalković M., Milošević B., Petrović Ž.: "Određivanje graničnog opterećenja statički neodređenih ramovskih nosača primenom principa virtualnih rada", Zbornik radova Građevinsko-arhitektonoskog fakulteta u Nišu, N°24 Niš, **2009**.
- [8] Popović B., Mladenović B., Petrović Ž.: "O problemu preraspodele uticaja statički neodređenih linijskih sistema", Teorijsko – eksperimentalna istraživanja elasto-plastičnog ponašanja inženjerskih konstrukcija, Univerzitet u Nišu, Niš, **2006**.
- [9] Hajdín N.: Proračun linijskih nosača prema stadijumu loma, Izgradnja (specijalno izdanje), Čelične konstrukcije, Beograd, **1972**.
- [10] Kachanov, L.M.: Foundations of the Theory of plasticity, North-Holland publishing company – Amsterdam – London, **1971**.
- [11] König A. Jan, Shakedown of Elastic – Plastic Structures, Institute of fundamental Technological Research, Polish Academi of Sciences, Elsevier, Amsterdam – Oxford – New York – Tokio, **1987**.

## DETERMINATION OF LIMIT LOAD OF STATICALLY INDETERMINATE TRUSS STRUCTURES

*Summary:* The paper presents the procedure of calculation of limit load of elasto – plastic truss structures exposed to action of proportional load which is gradually increased until the failure mechanism builds up. The calculation is based on the application of static and kinematic theorem which represent the basis of structural limit analysis providing the boundary load value in a rapid and efficient way. Application of these theorems were presented in examples of truss structures subjected to one and two-parametar loading.

**Key words:** Limit load, static theorem, kinematic theorem.