

ANALIZA GRANIČNE NOSIVOSTI KONTINUALNIH NOSAČA PRIMENOM PRINCIPA VIRTUELNOG RADA

Bojan Milošević¹,
Marina Mijalković²,
Žarko Petrović³
Mirza Hadzimujović⁴

UDK: 624.072.2 : 624.042

Rezime: U radu je prikazan postupak proračuna graničnog opterećenja primenom principa virtuelnog rada (osnovna energetska jednačina), jednog od osnovnih principa mehanike, koji je našao široku primenu i u teoriji plastičnosti. Metoda je predstavljena kao postupni i direktni postupak, na primeru kontinualnog nosača izloženog dejstvu koncentrisanih sila. Prednost postupne metode u odnosu na direktnu metodu je u tome što ona omogućava praćenje formiranja plastičnih zglobova usled proporcionalnog povećavanja opterećenja kao i određivanje uglova obrtanja – rotacija poprečnih preseka u kojima je došlo do formiranja plastičnih zglobova.

Ključne reči: Virtuelni rad, direktna metoda, postupna metoda, granično opterećenje.

1. UVOD

Proračun konstrukcija primenom teorije plastičnosti dopušta plastifikaciju materijala, tj. izlazak iz područja elastičnog ponašanja.

U području elastičnog ponašanja konstrukcije naponi i deformacije su proporcionalno zavisi. Povećanjem opterećenja koje deluje na konstrukciju dolazi do postupnog povećanja napona, sve dok vrednost napona u najopterećenijem vlaknu (ili vlaknima, u slučaju simetričnog preseka) ne dostigne vrednost napona tečenja. Daljim povećanjem opterećenja dolazi do plastifikacije poprečnog preseka, odnosno povećanja zone plastičnosti koja se postupno širi kako po visini tako i po dužini nosača, sve dok ne dođe do plastifikacije celog poprečnog preseka, a samim tim i formiranja plastičnog zgloba.^[6]

Poznato je da, kod statički određenih nosača, formiranjem plastičnog zgloba na mestu maksimalnog momenta savijanja dolazi do gubitka sposobnosti nošenja opterećenja i prelaska nosača u mehanizam. Za razliku od statički određenih nosača, kod statički neodređenih nosača formiranje jednog plastičnog zgloba ne dovodi do formiranja

¹ Bojan Milošević, mr, saradnik u nastavi, Visoka građevinsko – geodetska škola u Beogradu, Hajduk Stankova 2, 011/2422178, e – mail: prodic_80@yahoo.com

² Marina Mijalković, dr, vanredni profesor, Građevinsko – arhitektonski fakultet u Nišu, A. Medvdeva 14, 018/588200, e – mail: maca@gaf.ni.ac.rs

³ Žarko Petrović, dipl. ing. građ., Građevinsko – arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu, A. Medvdeva 14, 018/588200, e – mail: zarko@gaf.ni.ac.rs

⁴ Mirza Hadzimujović, dipl. ing. građ., Fakultet tehničkih nauka u Novom Pazaru, Vuka Karadžića bb, 020/317754, e – mail: mirzahadz@yahoo.com

mehanizma loma, što ukazuje da njihova nosivost nije u potpunosti iscrpljena. Nosivost jedne n puta statički neodređene konstrukcije biće u potpunosti iscrpljena kada se u konstrukciji formira $n+1$ plastičnih zglobova.

Prilikom određivanja graničnog opterećenja uvode se sledeće pretpostavke:

- deformacije su proporcionalne sa udaljavanjem od neutralne ose (važi Bernulijeva hipoteza o ravnim preseccima),
- važi idealizovana elasto – plastična zavisnost $\sigma - \varepsilon$ za materijal, kako za zatezanje tako i za pritisak,
- deformacije su male,
- presek raspolaže potrebnom duktilnošću,
- zadovoljeni su uslovi ravnoteže poprečnog preseka, kako normalnih sila $\Sigma X=0$, tako i momenta savijanja $\Sigma M=0$.

Da bi se granična nosivost jedne konstrukcije utvrdila primenom teorije plastičnosti, prethodno treba dokazati da će za nju merodavno granično stanje nastati formiranjem mehanizma loma, tj. treba eliminisati pojavu bilo kog drugog graničnog stanja. Potrebno je isključiti pojavu zamora usled dejstva promenljivog opterećenja, zatim mogućnost pojave lokalne nestabilnosti pre dostizanja pune plastifikacije i isključiti pojavu bilo kojih efekata koji bi doveli do loma konstrukcije pre formiranja dovoljnog broja plastičnih zglobova za njen prelazak u mehanizam.[5]

Analiza ponašanja konstrukcije od formiranja prvog plastičnog zgloba pa sve do formiranja mehanizma loma ima uglavnom teorijski značaj. Granično opterećenje moguće je odredi neposredno iz mehanizma loma, kod koga je potrebno da su istovremeno ispunjeni i uslovi ravnoteže i uslov plastičnosti, što znači da su momenti savijanja u svim preseccima, osim u plastičnim zglobovima, manji od plastičnog momenta.

Granično opterećenje moguće je odrediti na dva načina:

- postupnom metodom – uočava se formiranje svakog plastičnog zgloba usled proporcionalnog povećanja opterećenja sve do formiranja mehanizma loma;
- direktnom metodom – granično opterećenje određuje se na osnovu pretpostavljenog mehanizma loma.

Metode proračuna koje se koriste za određivanje graničnog opterećenja imaju za osnovu statičku i kinematičku teorem i u okviru procesa utvrđivanja realnog mehanizma loma služe se poznatim relacijama korišćenim i u teoriji elastičnosti (uslovima ravnoteže, uslovima kompatibilnosti pomeranja, principom virtualnog rada, itd.). Navedene metode koje se koriste pri proračunu konstrukcija omogućavaju utvrđivanje granične nosivosti sistema u smislu definisanja graničnog opterećenja koje dovodi do formiranja mehanizma loma, kao i definisanje stanja unutrašnjih sila u elementima sistema, ali ne daju nikakve podatke o stanju deformacije sistema.

2. PRIMENA PRINCIPA VIRTUELNOG RADA NA ODREĐIVANJA GRANIČNOG OPTEREĆENJA

Princip virtuelnog rada predstavlja alternativnu formu iskazivanja uslova ravnoteže, kao i uslova kompatibilnosti, a kako ne zavisi od odnosa napon – dilatacija može se primeniti kako na elastična, tako i na elasto – plastična tela. Princip virtuelnog rada je važan iz najmanje dva razloga:

- osnova je za izvođenje ostalih bazičnih teorema u teoriji plastičnosti;

• veoma je pogodan pri rešavanju numeričkih problema kod elasto – plastičnih tela. Princip virtuelnog rada može se matematički iskazati sledećim izrazom:

$$\iiint_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV = \iiint_V b_i du_i dV + \iint_{S_r} T_{oi} du_i dS, \quad (1)$$

gde leva strana jednačine predstavlja unutrašnji rad polja napona na virtuelnom polju dilatacija, a desna strana jednačine predstavlja spoljašnji rad zapreminskih i površinskih sila na virtuelnom polju pomeranja.

Mora se naglasiti da princip virtuelnog rada važi za bilo koje virtuelno polje pomeranja (ne mora biti i stvarno) dok god je ono kinematički moguće i kompatibilno sa poljem dilatacija. To polje dilatacija može biti nezavisno od polja napona.

Ako se prilikom određivanja graničnog opterećenja uvede pretpostavka da je uticaj transverzalnih i normalnih sila na plastifikaciju poprečnog preseka mali, kao i da pomeranje oslonaca ne utiče na veličinu graničnog opterećenja, jednačina virtuelnog rada primenjena na posmatrani statički sistem, dobija sledeći oblik:

$$\sum P_i \delta_i = \int M_i \kappa ds + \sum M \theta. \quad (2)$$

U jednačini (2) M je bilo koja raspodela momenata savijanja koja zadovoljava uslove ravnoteže sa zadatim spoljašnjim opterećenjem P, dok je sa κ obeležena bilo koja raspodela krivina kompatibilna sa rotacijom plastičnih zglobova θ i pomeranjima δ .

Jednačina (2) se može koristiti na dva načina. U prvom, sistem veličina (κ , θ , δ) je virtuelan što znači da se krivine, rotacije i pomeranja mogu proizvoljno izabrati i da moraju zadovoljiti samo jednačine kompatibilnosti a ne moraju biti u vezi sa datim opterećenjem. Ovaj oblik principa virtuelnog rada naziva se Princip virtuelnih pomeranja i služi za dobijanje jednačina ravnoteže. Druga mogućnost je da se koriste virtuelne sile (P, M), koje se mogu birati proizvoljno i moraju zadovoljiti jedino uslove ravnoteže. Ovaj princip se naziva Princip virtuelnih sila i kao rezultat korišćenja ovog principa dobijaju se jednačine kompatibilnosti.

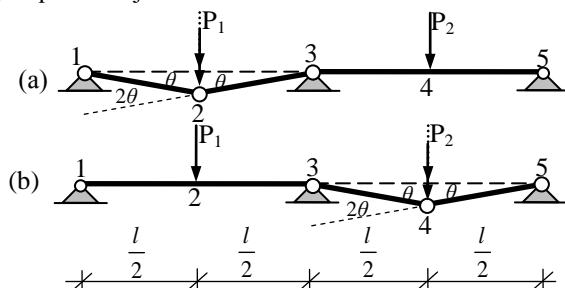
2.1. Analiza granične nosivosti kontinualnog nosača na dva polja postupnom metodom

Određivanje graničnog opterećenja primenom principa virtuelnog rada postupnom metodom biće prikazano na primeru kontinualnog nosača na dva polja. Nosač je jedanput statički neodređen, pri čemu se mogu uočiti tri karakteristična preseka u kojima je potrebno odrediti momente savijanja. Za određivanje momenta savijanja u obeleženim presecima potrebno je napisati tri jednačine, jednu jednačinu kompatibilnosti koja se dobija primenom principa virtuelnih sila, dok se primenom principa virtuelnih pomeranja dobijaju dve jednačine ravnoteže. Jednačine ravnoteže dobijaju se razmatranjem nezavisnih mehanizama loma, pri čemu se, u ovom slučaju, mogu uočiti dva nezavisna mehanizma loma (Slika 1.). Mehanizmi loma se formiraju umetanjem zglobova koji u ovom slučaju nisu plastični. Ovi zglobovi izazivaju virtuelne rotacija i virtuelna pomeranja karakterističnih preseka kontinualnog nosača na dva polja. Jednačine ravnoteže mogu se napisati u sledećem obliku:

$$M_2 (2\theta) + M_3 (-\theta) = P_1 \frac{l}{2} \theta, \quad (3)$$

$$M_3 (-\theta) + M_4 (2\theta) = P_2 \frac{l}{2} \theta. \quad (4)$$

Kako jednačine ravnoteže jednog statičkog sistema ne zavise od karakteristika materijala od kog je on sačinjen, one moraju biti zadovoljene bez obzira da li se statički sistem nalazi u elastičnoj ili plastičnoj oblasti.



Slika 1 – (a) Mehanizam loma prvog polja, (b) Mehanizam loma drugog polja

Jednačine kompatibilnosti dobijaju se primenom principa virtuelnih sila, u trenutku kada je razmatrani sistem neopterećen. Kako je sistem neopterećen, raspodela momenta savijanja ne postoji, pa se iz tog razloga pretpostavlja da duž elemenata statičkog sistema postoji neka proizvoljna (virtuelna) raspodela momenata savijanja (m) koju je prvi uveo Heyman (1961). Jednačina (2), može se napisati u obliku:

$$0 = \int \frac{m^* M}{EI} ds + \sum m^* \theta. \quad (5)$$

Broj nezavisnih raspodela zaostalih momenata savijanja jednak je broju statičke neodređenosti jednog statičkog sistema. Pretpostavljena raspodela momenata savijanja mora da zadovolji jednačine (6) i (7) koje su napisane primenom principa virtuelnih pomeranja u trenutku kada je sistem rasterećen.

$$2m_2 - m_3 = 0, \quad (6)$$

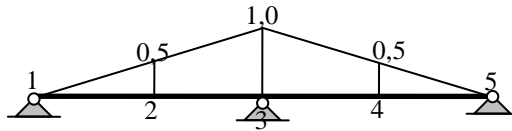
$$-m_3 + 2m_4 = 0 \quad (7)$$

Pod dejstvom opterećenja koje deluje na statički sistem dolazi do pojave momenta savijanja i rotacija poprečnih preseka čija je raspodela data u poslednja dva reda tabele (1). Primenom jednačine (5) moguće je napisati jednačinu kompatibilnosti koja je data jednačinom (8).

Tabela 1 – Momenti savijanja kontinualnog nosača na dva polja

virtuelna raspodela						
presek		1	2	3	4	5
m	i	0	0,5	1,0	0,5	0
aktuelna raspodela						
$EI\kappa=M$		0	M_2	M_3	M_4	0_5
θ		0	θ_2	θ_3	θ_4	0

$$3M_2 + 5M_3 + 3M_4 + \frac{12EI}{l} (\theta_2 + 2\theta_3 + \theta_4) = 0. \quad (8)$$



Slika 2 – Pretpostavljena raspodela momenta savijanja kontinualnog nosača na dva polja

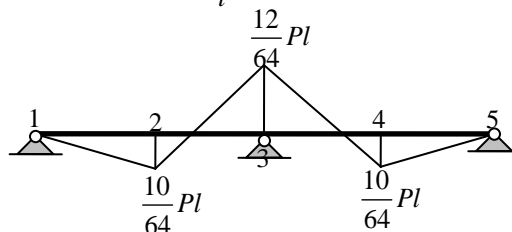
Jednačine ravnoteže (3) i (4), kao i jednačina kompatibilnosti (8), čine sistem jednačina na osnovu kojih se dobijaju momenti savijanja u obeleženim karakterističnim presecima.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M_2 \\ \Delta M_3 \\ \Delta M_4 \end{bmatrix} + \frac{12EI}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta Pl}{2} \\ \frac{\Delta Pl}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

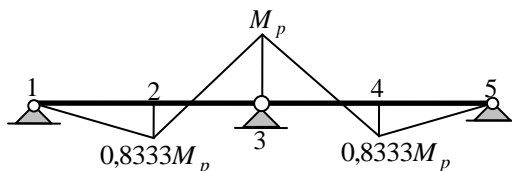
Pomoću sistema jednačina (9) moguće je postupno odrediti veličinu opterećenja nakon formiranja svakog plastičnog zgloba, sve do formiranja mehanizma loma, pri čemu se određuju i rotacije preseka u kojima je došlo do formiranja plastičnih zglobova. Da bi se granično opterećenje dobilo u jednoparametarskom obliku, u sistemu jednačina (9) izvršice se zamena sila P_1 i P_2 silom P .

Rešavanjem sistema jednačina (9) pod uslovom da su rotacije obeleženih poprečnih preseka ($\theta_2, \theta_3, \theta_4$) jednake nuli, dobija se moment savijanja tih preseka kada se nosač nalazi u elastičnoj oblasti. Izjednačavanjem najveće vrednosti momenta savijanja (presek 3) i momenta plastičnosti poprečnog preseka dobija se veličina opterećenja koja dovodi do formiranja prvog plastičnog zgloba:

$$M_3 = \frac{12}{64} Pl = M_p \Rightarrow P_1 = 5,333 \frac{M_p}{l} \quad (10)$$



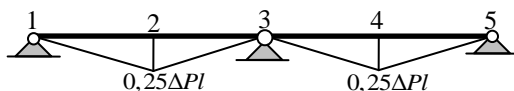
Slika 3 – Elastična raspodela momenta savijanja u funkciji opterećenja



Slika 4 – Raspodela momenta savijanja nakon formiranja prvog plastičnog zgloba

Daljim povećanjem opterećenja, moment savijanja preseka 3 jednak je momentu plastičnosti poprečnog preseka, pri čemu dolazi do rotacije tog preseka. Zamenom uslova (11) u sistem jednačina (9) dobija se raspodela momenta savijanja u funkciji priraštaja statičkog sistema koji je nastao nakon formiranja prvog plastičnog zgloba (Slika 5).

$$\begin{aligned} M_3 &= M_p, & \Delta M_3 &= 0, & \Delta \theta_3 &> 0, \\ \Delta \theta_2 &= \Delta \theta_4 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$



Slika 5 – Raspodela momenta savijanja u funkciji priraštaja nakon formiranja prvog plastičnog zgloba

Priraštaj opterećenja koji dovodi do formiranja drugog plastičnog zgloba je:

$$-0,833M_p - 0,25\Delta P_1l = -M_p \quad \Rightarrow \quad \Delta P_1 = 0,667 \frac{M_p}{l}, \quad (12)$$

dok je rotacija preseka u kom se formirao prvi plastični zglob:

$$\Delta \theta_3 = 0,50 \frac{\Delta P_1 l^2}{EI}. \quad (13)$$

Opterećenje koje dovodi do formiranja plastičnih zglobova preseka 3, 2 i 4 je:

$$P_2 = P_1 + \Delta P_1 = 5,33 \frac{M_p}{l} + 0,667 \frac{M_p}{l} = 6,00M_p. \quad (14)$$

Ovo opterećenje u isto vreme predstavlja i granično opterećenje kontinualnog nosača na dva polja.

2.2. Određivanje graničnog opterećenja kontinualnog nosača na dva polja primenom direktne metode

Princip virtuelnog rada moguće je primeniti na određivanje graničnog opterećenja linijskih sistema i direktnom metodom. Jednačina virtuelnog rada postavlja se na prethodno pretpostavljenom mehanizmu loma. U ovom slučaju vrši se izjednačavanje virtuelnog rada svih spoljašnjih sila, sa radovima apsorbovanim u presecima u kojima su pretpostavljeni plastični zglobovi. Granično opterećenje je ono koje je najmanje od svih graničnih opterećenja dobijenih na pretpostavljenim mehanizmima loma.

Kod posmatrane kontinualne grede na dva polja mogu se formirati tri mehanizma loma, dva nezavisna (Slika 6.a i Slika 6.b) i jedan kombinovani (Slika 6.c). Za svaki od pretpostavljenih mehanizama loma primenom jednačine virtuelnog rada dobijaju se granične sile loma svakog od mehanizma, a date su izrazima (15), (16) i (17):

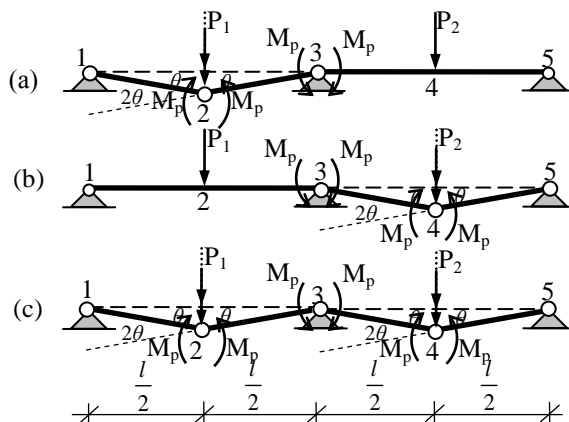
$$\begin{aligned} M_p (2\theta) + M_p \theta &= P_1 \frac{l}{2} \theta, \\ P_1 &= \frac{6M_p}{l}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$M_p \theta + M_p (2\theta) = P_2 \frac{l}{2} \theta,$$

$$P_2 = \frac{6M_p}{l}, \quad (16)$$

$$M_p (2\theta) + M_p (\theta) + M_p (\theta) + M_p (2\theta) = P_1 \frac{l}{2} \theta + P_2 \frac{l}{2} \theta,$$

$$P = \frac{6M_p}{l}. \quad (17)$$

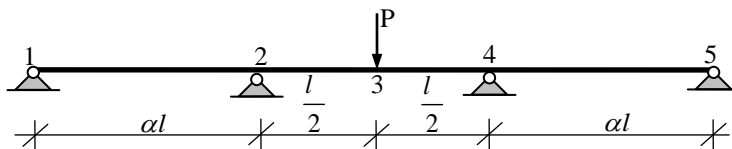


Slika 6 – (a) Mehanizam loma prvog polja, (b) Mehanizam loma drugog polja, (c) Kombinovani mehanizam loma u oba polja

Za svaki od pretpostavljenih mehanizama loma dobijena je po jedna granična sila loma, od kojih je ona koja je najmanja u isto vreme i sila koja će dovesti do formiranja mehanizma loma. Veličina graničnog opterećenja kontinualnog nosača na dva polja dobijena direktnom metodom jednaka je graničnoj sili loma koja se dobija primenom postupne metode.

2.3. Analiza granične nosivosti kontinualnog nosača na tri polja

Posmatrani nosač (Slika 7) je dva puta statički neodređen, pri čemu se mogu uočiti tri karakteristična preseka u kojima je potrebno odrediti momente savijanja. Nosač je na polovini srednjeg polja opterećen koncentrisanom silom P , dok dužina prvog i poslednjeg polja zavisi od veličine koeficijenta α . Kod ovog nosača potrebno je napisati tri jednačine i to dve jednačine kompatibilnosti i jednu jednačinu ravnoteže. Jednačina ravnoteže dobija se razmatranjem nezavisnog mehanizama loma (Slika 8).

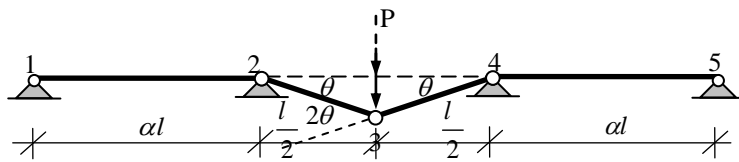


Slika 7 – Kontinualni nosač na tri polja opterećen u srednjem polju koncentrisanom silom P

$$M_2(\theta) + M_3(-2\theta) + M_4(\theta) = P \frac{l}{2}(\theta) \quad (18)$$

Kako je broj pretpostavljenih (virtuelnih) raspodela momenata savijanja jednak broju statičke neodređenosti, za kontinualni nosača na tri polja postoje dve nezavisne raspodele momenata savijanja. Pretpostavljene raspodele momenata savijanja moraju da zadovolje jednačinu (19) napisanu primenom principa virtuelnih pomeranja kada je sistem neopterećen.

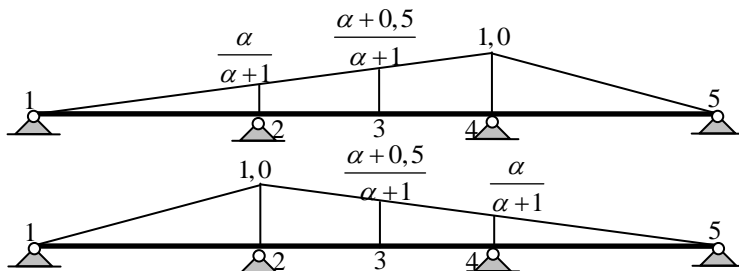
$$m_1 - 2m_2 + m_3 = 0 \quad (19)$$



Slika 8 – Mehanizam loma kontinualnog nosača na tri polja

Tabela 2 – Momenti savijanja kontinualnog nosača na tri polja

virtuelna raspodela						
presek		1	2	3	4	5
m	i	0	$\frac{\alpha}{\alpha+1}$	$\frac{\alpha+0,5}{\alpha+1}$	1,0	0
	ii	0	1,0	$\frac{\alpha+0,5}{\alpha+1}$	$\frac{\alpha}{\alpha+1}$	0
aktuelna raspodela						
EIκ=M		0	M ₂	M ₃	M ₄	0
θ		0	θ ₂	θ ₃	θ ₄	0



Slika 9 – Moguća raspodela zaostalog momenta savijanja

Primenom jednačine (5) moguće je napisati jednačine kompatibilnosti u obliku:

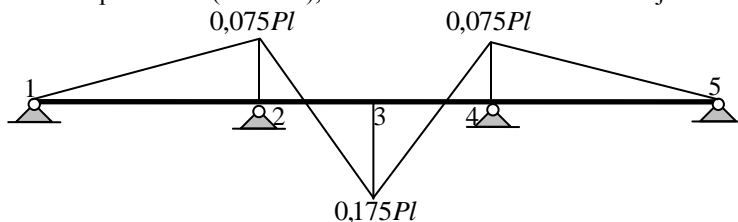
$$\frac{(4\alpha^2 + 3\alpha^2 + 0,5)}{2(1+\alpha)} M_2 + \frac{(3+6\alpha)}{2(1+\alpha)} M_3 + \frac{(4\alpha^2 + 7\alpha + 2,5)}{2(1+\alpha)} M_4 + \frac{6EI}{l} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \theta_2 + \frac{2(\alpha+0,5)}{1+\alpha} \theta_3 + \theta_4 \right) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{(4\alpha^2 + 7\alpha + 0,5)}{2(1+\alpha)} M_2 + \frac{(3+6\alpha)}{2(1+\alpha)} M_3 + \frac{(4\alpha^2 + 3\alpha + 0,5)}{2(1+\alpha)} M_4 + \frac{6EI}{l} \left(\theta_2 + \frac{2(\alpha+0,5)}{1+\alpha} \theta_3 + \frac{\alpha}{1+\alpha} \theta_4 \right) = 0. \quad (21)$$

Jednačina ravnoteže (18) kao i dve jednačine kompatibilnosti (20) i (21) čine sistem jednačina na osnovu kojih je moguće izvršiti analizu granične nosivosti kontinualnog nosača na tri polja. Sistem jednačina može se napisati u sledećem obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \frac{(4\alpha^2 + 3\alpha^2 + 0,5)}{2(1+\alpha)} & \frac{(3+6\alpha)}{2(1+\alpha)} & \frac{(4\alpha^2 + 7\alpha + 2,5)}{2(1+\alpha)} \\ \frac{(4\alpha^2 + 7\alpha + 2,5)}{2(1+\alpha)} & \frac{(3+6\alpha)}{2(1+\alpha)} & \frac{(4\alpha^2 + 3\alpha^2 + 0,5)}{2(1+\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M_2 \\ \Delta M_3 \\ \Delta M_4 \end{bmatrix} + \frac{6EI}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{1+\alpha} & \frac{2(\alpha+0,5)}{1+\alpha} & 1 \\ 1 & \frac{2(\alpha+0,5)}{1+\alpha} & \frac{\alpha}{1+\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta Pl}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Rešenjem sistema jednačina (22) pod uslovom da su rotacije svih karakterističnih preseka ($\theta_2, \theta_3, \theta_4$) jednake nuli, a u slučaju kada je $\alpha=1,0$, dobijaju se veličine momenta savijanja u karakterističnim presecima (Slika 10), kada se nosač nalazi u elastičnoj oblasti.



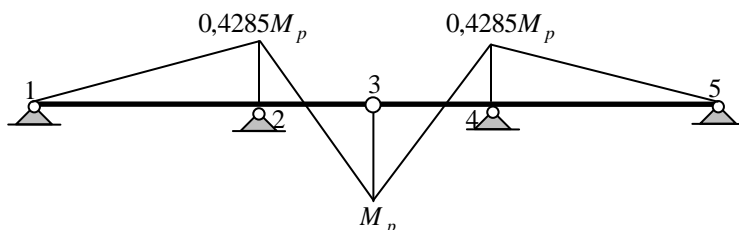
Slika 10 – Raspodela elastičnog momenta savijanja u funkciji opterećenja

Kako je najveći moment savijanja u preseku 3, izjednačavanjem ove veličine elastičnog momenta savijanja sa momentom plastičnosti poprečnog preseka dobija se sila koja dovodi do formiranja prvog plastičnog zgloba:

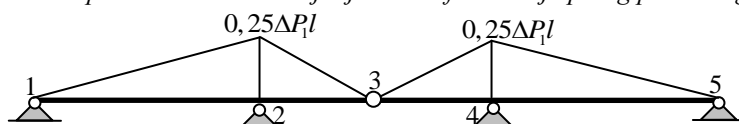
$$0,175Pl = M_p \quad \Rightarrow \quad P_1 = 5,714 \frac{M_p}{l} \quad (23)$$

Daljim povećanjem opterećenja, moment savijanja preseka 3 jednak je momentu plastičnosti poprečnog preseka, pri čemu je formiranjem plastičnog zgloba došlo do rotacije poprečnog preseka. Zamenom uslova (24) u sistem jednačina (22) dobija se moment savijanja statičkog sistema nastalog nakon formiranja prvog plastičnog zgloba (Slika 12).

$$\begin{aligned} M_3 &= M_p, & \Delta M_3 &= 0, & \Delta \theta_3 &< 0, \\ \Delta \theta_2 &= \Delta \theta_4 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$



Slika 11 – Raspodela momenta savijanja nakon formiranja prvog plastičnog zgloba



Slika 12 – Raspodela momenta savijanja u funkciji prirštaja nakon formiranja prvog plastičnog zgloba

Priraštaj opterećenja koji dovodi do pojave drugog plastičnog zgloba je:

$$0,4285M_p + 0,25\Delta P_1 l = M_p \quad \Rightarrow \quad \Delta P_1 = 2,286 \frac{M_p}{l}. \quad (25)$$

Rotacija preseka 3 u kome je došlo do formiranja prvog plastičnog zgloba je:

$$\theta_3 = -\frac{0,14583\Delta P_1 l^2}{EI}. \quad (26)$$

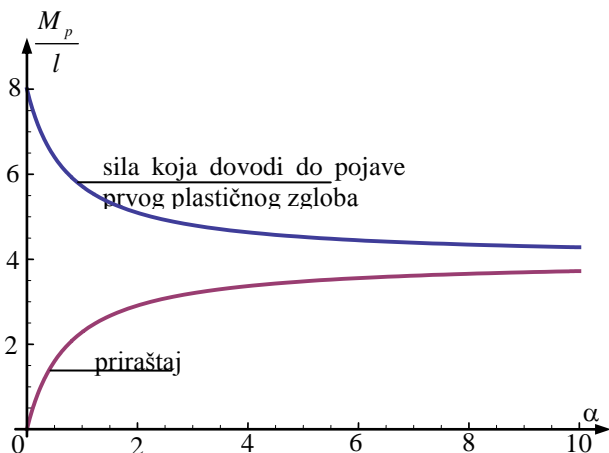
Opterećenje koje dovodi do formiranja plastičnih zglobova preseka 3, 2 i 4, a time i formiranja mehanizma loma je:

$$P_2 = P_1 + \Delta P_1 = 5,714 \frac{M_p}{l} + 2,286 \frac{M_p}{l} = 8,0 \frac{M_p}{l} \quad (27)$$

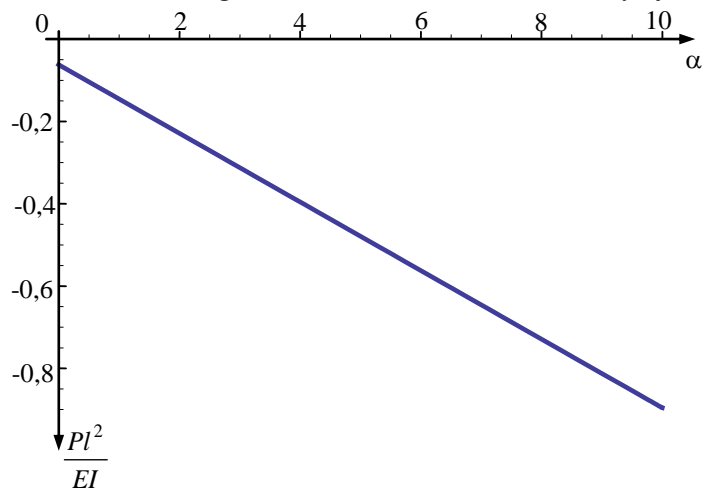
U ovom delu rada prikazan je postupak određivanja graničnog opterećenja kontinualnog nosača na tri polja kada su polja nosača iste dužine. Sistem jednačina (22) moguće je rešiti za različite vrednosti koeficijenta α . Tako će ovde biti prikazana promena sile koja dovodi do formiranja prvog plastičnog zgloba i priraštaja opterećenja (Slika 13), kao i rotacije prvo formiranog plastičnog zgloba (Slika 14), za slučaj kada je: $0 \leq \alpha \leq 10$.

Na Slici 13, uočava se da u slučaju kada je $\alpha=0$ granično opterećenje odgovara graničnom opterećenju obostrano ukleštene grede opterećene na polovini koncentrisanom silom P, pri čemu se sa Slike 14 može očitati rotacija preseka u kome je došlo do formiranja prvog plastičnog zgloba. Sa porastom koeficijenta α , sila koja dovodi do formiranja prvog plastičnog zgloba teži da dostigne vrednost koja bi odgovarala graničnom opterećenju

proste grede, dok u tom slučaju dolazi do rasta priraštaja opterećenja. Sabiranjem sile koja dovodi do formiranja prvog plastičnog zgloba i priraštaja za bilo koje α dobija se granična sila kontinualnog nosača na tri polja. Međutim, na osnovu dijagrama rotacije prvo formiranog plastičnog zgloba (Slika 14) uočava se da one rastu sa povećanjem koeficijenta α i da će u jednom trenutnu izazvati velike deformacije nosača, tako da dalje određivanje priraštaja opterećenja ne bi imalo smisla, pa se nakon formiranja prvog plastičnog zgloba može odrediti granično opterećenje. U ovom slučaju bi trebalo ograničiti deformacije sistema, što bi omogućilo određivanje konačne vrednosti granične sile loma.

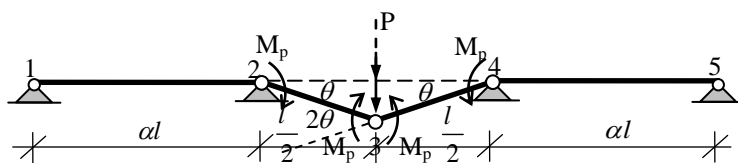


Slika 13 – Promena granične sile loma u zavisnosti od koeficijenta α



Slika 14 – Promena rotacije preseka u kom je došlo do formiranja prvog plastičnog zgloba u zavisnosti od koeficijenta α

Kako je već pokazano u delu 2.2 rada, princip virtuelnog rada može se primeniti i kao direktna metoda. Na osnovu pretpostavljenog mehanizma loma (Slika 15) moguće je odrediti veličinu graničnog opterećenja kontinualnog nosača na tri polja.



Slika 15 – Mehanizam loma kontinualnog nosača na tri polja

$$M_p \theta + M_p 2\theta + M_p \theta = P \frac{l}{2} \theta, \quad (28)$$

$$P = 8,0 \frac{M_p}{l}.$$

Nedostatak direktne metode ogleda se u nemogućnošću praćenja promene granične sile loma u zavisnosti od promene dužine krajnjih polja kao i nepoznavanja deformacijskih veličina. Kako se može uočiti granično opterećenje koje je dobijeno direktnom metodom, a dato je jednačinom (28), ne zavisi od koeficijenta α tj., krajnjih polja kontinualnog nosača. Za slučaj kada je $\alpha=1,0$ granično opterećenje dobijeno postupnom i direktnom metodom ima istu veličinu, dok se primenom postupne metode za $\alpha \rightarrow \infty$ ono ne može odrediti jer do loma dolazi na osnovu pojave graničnog stanja upotrebljivosti usled pojave velikih deformacija, a ne graničnog stanja nosivosti. Ovom problematikom među prvima su se bavili F. Stussi i C.F. Kollbrunner (1935) kao i P.S. Symonds i B.G. Neal (1952).

3. ZAKLJUČAK

Primena principa virtuelnog rada na određivanje graničnog opterećenja kontinualnih nosača je veoma jednostavna kako direktnom, tako i postupnom metodom. Primenom direktne metode se na brz i jednostavan način dolazi do veličine granične sile, pri čemu su deformacijske veličine sistema nepoznate. Postupna metoda omogućava praćenje procesa formiranja plastičnih zglobova sa proporcionalnim povećanjem opterećenja sve do formiranja mehanizma loma kada se određuje veličina graničnog opterećenja. Prednost ove metode je što je posle formiranja svakog plastičnog zgloba moguće odrediti i veličine rotacija plastičnih zglobova.

Bez obzira da li se granična sila loma određuje postupnom ili direktnom metodom primenom principa virtuelnog rada, njena veličina je ista. Može se zaključiti da se primenom direktne metode brže dolazi do rešenja, dok je postupna metoda detaljnija u graničnoj analizi statički neodređenih linijskih nosača. Metode proračuna graničnog opterećenja primenom principa virtuelnog rada prikazane na kontinualnom nosaču na dva i tri polja u ovom radu moguće je primeniti skoro na sve klase linijskih sistema.

LITERATURA

- [1] Baker, J, Heyman, J, Plastic Design of Frames, 1. Fundamentals, Cambridge University Press, London, **1969**.
- [2] Lubliner, J, Plasticity Theory, University of California at Berkeley, **2006**.
- [3] Mijalković, M., Trajković, M., Milošević, B., "Limit analysis of beams under combined stresses", Facta universitatis - series: Architecture and Civil Engineering, vol. 6, no. 1, str. 75 – 88, University of Niš, **2008**.
- [4] Mijalković, M., Nikodijević, Lj., "Granična analiza kontinualnih nosača", Zbornik radova Građevinskog fakulteta, Niš, No 15/16, **1994/95**, str. 125 – 132.
- [5] Mijalković, M., Milošević, B., Petrović Ž., "Određivanje graničnog opterećenja statički neodređenih ramovskih nosača primenom principa virtuelnog rada", Zbornik radova Građevinskog fakulteta, Niš, No 24, **2009**, str. 9 – 21.
- [6] Neal, G. B, The Plastic Methods of Structural Analysis, Chapman and Hall, London, **1977**.
- [7] Popović, B., Mladenović, B., Petrović, Ž., "O problemu preraspodele uticaja statički neodređenih linijskih sistema", teorijsko – eksperimentalna istraživanja elasto – plastičnog ponašanja inženjerskih konstrukcija, Univerzitet u Nišu, Niš, **2006**.
- [8] Popović, B., Petrović, Ž., Milošević, B., "Veličina i oblik zone plastičnosti i plastičnog zgloba kod proste grede opterećene jednom koncentrisanom silom ili jednakopodeljenim opterećenjem po celom rasponu sa ili bez aksijalnih sila na krajevima grede", Zbornik radova Građevinskog fakulteta, Niš, No 22, **2007**, str. 19 – 33.
- [9] S. Stevanović, B. Popović, D. Petković.: "Granična analiza konstrukcija", Građevinski fakultet Univerziteta u Nišu, Niš, **1994**.
- [10] Chakrabarty, J.: Theory of plasticity, Elsevier Butterworth – Heinemann, **2006**.
- [11] Heyman, J.: "Beams and Framed Structures", Pergamon press, Oxford, London, Paris, Frankfurt, **1964**.

ULTIMATE LOAD ANALYSIS OF WIDE – FLANGE BEAM THROUGH THE APPLICATION OF THE PRINCIPLE OF VIRTUAL WORK

Summary: This work describes the procedure of ultimate load analysis through the application of the principle of virtual work (basic energy equation), one of the basic principles of mechanics, which has found its wide application in the theory of plasticity. The method is shown both as gradual and direct method, on wide-flange beam subjected to the influence of concentrated forces. The advantage of gradual method in relation to direct method is that it enables monitoring of plastic hinge formation due to proportional increase of loading, as well as determination of angles of rotation – rotation of cross – section where the plastic hinges are formed.

Key words: Virtual work, direct method, gradual method, ultimate load.