

ANALIZA PROLOMA PLITKIH LINIJSKIH LUKOVA U RAVNI PRIMJENOM ARC-LENGTH METODA

Aleksandar Borković¹

UDK: 517.957 : 624.072.32

DOI: 10.14415/zbornikGFS22.005

Rezime: U radu se daje nastavak prethodno započete geometrijski nelinearne analize. Prilikom analize velikih pomjeranja plitkih lukova, za određene geometrije i opterećenja, može doći do pojave proloma unaprijed (*snap-through*) i/ili proloma unazad (*snap-back*). S obzirom da tokom prolaska kroz ove kompleksne ravnotežne putanje konstrukcija dostiže granične tačke i po opterećenju i po pomjeranjima, klasične sheme rješavanja, bazirane samo na kontroli opterećenja ili pomjeranja, nisu upotrebljive. U cilju opisivanja ovih fenomena, u radu se razmatra primjena arc-length u analizi ravanskih linijskih nosača. Korišten je konačni element Bernuli-Ojlerove grede. Proračun je sproveden prema formulaciji totalnog Langražijana. Korišteni su vektor neuravnoteženog opterećenja i tangentna matrica krutosti u zatvorenom obliku čime je ostvarena ušteda računarskog vremena u dijelu proračuna koji se obično sprovodi numeričkom integracijom. Posebna pažnja je posvećena određivanju predznaka pretpostavljenog priraštaja opterećenja na početku svakog novog inkrementa. Predstavljeni pristup je programiran u softverskom paketu Wolfram Mathematica. Na kraju je dat odgovarajući numerički primjer u okviru koga je izvršeno poređenje rezultata dobijenih predstavljenim pristupom sa onima dobijenim komercijalnim softverskim paketom Abaqus.

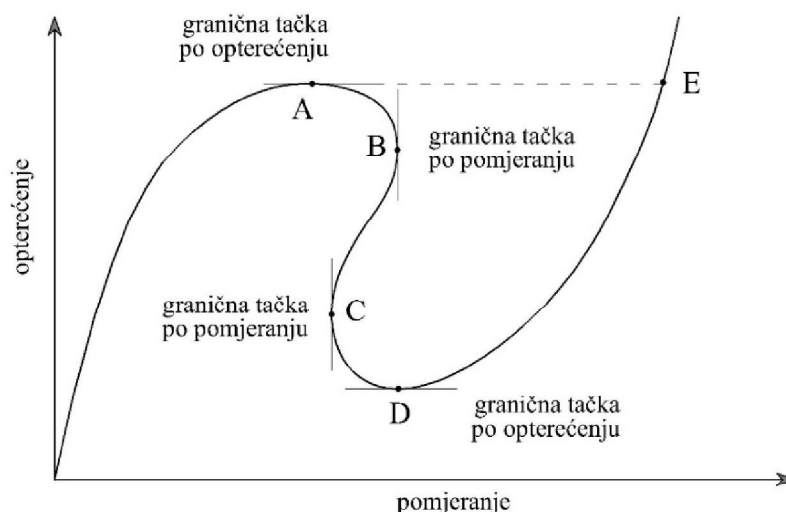
Ključne riječi: Arc – length metod, plitki lukovi, Bernuli – Ojlerova greda.

1. UVOD

Nelinearna analiza konstrukcija se pokazuje kao neophodna za proračune određenih klasa savremenih konstrukcija. Klasične metode za rješavanje sistema nelinearnih jednačina, zasnovane samo na kontroli opterećenja ili pomjeranja, ne mogu opisati kompletne ravnotežne putanje kroz koje može proći konstrukcija tokom deformisanja. Primjer ovakvog ponašanja konstrukcije je dat na slici 1, gdje je prikazana zavisnost nekog karakterističnog pomjeranja od nivoa opterećenja. Ovakva ravnotežna putanja se, recimo, može javiti tokom praćenja ugiba sredine plitkog luka prilikom njegovog prolamanja usljed dejstva vertikalnog opterećenja. Pojava povećanja pomjeranja sa smanjivanjem opterećenja se naziva prolom unaprijed (*snap through*), dok se smanjenje pomjeranja praćeno smanjenjem opterećenja naziva prolom unazad (*snap-back*) [3]. Standardni postupci, kao što je Njutn-Rapsonov metod zasnovan samo na kontroli opterećenja [1, 2], će adekvatno opisati ponašanje konstrukcije do tačke A, a potom

¹ mr Aleksandar Borković, dipl. inž. građ, Arhitektonsko-građevinsko-geodetski fakultet Banjaluka, Vojvode Stepe Stepanovića 77/3, tel: +38765917366, e-mail: aborkovic@agfbl.org

otkazati ili "preskočiti" do tačke E [1, 3]. Uzrok ove greške leži u činjenici da konstrukcija u tački A gubi stabilnost, tj. dostiže graničnu tačku po opterećenju, te ne može da uravnoteži ni najmanji pozitivan priraštaj opterećenja. Numerički posmatrano, ovaj gubitak ravnoteže karakteriše singularitet tangentne matrice krutosti, zbog čega je u tački A nemoguće uspostaviti ravnotežu. Slična situacija je i u tački D, koja je donja granična tačka po opterećenju.



Slika 1. Tipična složena ravnotežna putanja sa pojavom proloma unaprijed i unazad

Jedan od načina za prevazilaženje ovih poteškoća jeste primjena kontrole pomjeranja [1]. Ovim postupkom se za odgovarajuće inkrementalno pomjeranje određuje odgovarajuće opterećenje, bilo ono veće ili manje od onog iz prethodno iskonvergiranih inkrementa. Mogući singularitet tangentne matrice krutosti ne predstavlja veliki problem. Naime, primjenom inkrementalno-iterativnih procedura se rijetko dostiže tačno granična tačka, te je dovoljno pronaći ravnotežu neposredno ispred i iza nje.

Međutim, postupak kontrole pomjeranja otkazuje u tačkama B i C gdje konstrukcija dostiže granične tačke po pomjeranju. S druge strane, postupkom kontrole opterećenja mse može preći preko tačaka B i C.

Jedno od rješenja za opisani problem jeste automatsko prebacivanje procedure za rješavanje nelinearnih jednačina sa kontrole opterećenja na kontrolu pomjeranja, i obrnuto. Pokazuje se da takav postupak nije efikasan. Danas je uglavnom u upotrebi *arc-length* (dužina luka) metod koji je u stanju da opiše obe vrste graničnih tačaka [1]. Suština ovog metoda leži u uvođenju faktora proporcionalnosti opterećenja kao nove nepoznate, pri čemu ovaj faktor može biti pozitivan ili negativan. Definisanjem odgovarajuće dodatne jednačine, može se odrediti tačan priraštaj opterećenja i prevazići problem koji se javlja prilikom nailaska na obe vrste graničnih tačaka.

U radu se ukratko daje izvođenje nelinearnih jednačina ravnoteže te *arc-length* metod kao postupak za njihovo rešavanje. Na kraju je detaljno analiziran jedan karakterističan primjer. Rad predstavlja nastavak analize date u [2] i [3]. Odgovarajući programski kod je unapređen tako što mu je ugrađena opcija za rješavanje sistema nelinearnih jednačina ravnoteže primjenom *arc-length* metoda.

2. TEORIJA

Konačni element Bernuli-Ojlerove grede sa dva čvora, šest generalisanih pomjeranja i Hermiteovim interpolacionim funkcijama je korišten za analizu [4]. Geometrijska nelinearnost je uvedena u skladu sa von Karmanovim pristupom prema kome izraz za dilataciju u pravcu ose štapa možemo pojednostaviti kao

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}v_{,x}^2, \quad (1)$$

gdje je u komponenta vektora pomjeranja u pravcu ose štapa, a v komponenta upravna na nju. Sabirak $u_{,x}^2$ zanemarujemo u skladu sa von Karmanovom teorijom.

Totalna potencijalna energija elastičnog sistema jednaka je zbiru rada spoljašnjih sila i energije deformacije $\Pi = W + U$. Energiju deformacije predstavljamo kao integral proizvoda vektora napona i vektora deformacije po zapremini tijela

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (2)$$

U jednačini (2), vektori $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ sadrže komponente drugog Piola-Kirhofovog tenzora napona i Grin-Lagranžovog tenzora deformacije, redom. \mathbf{D} je konstitutivna matrica izvedena prema generalisanom Hukovom zakonu. Sve veličine se mjere u odnosu na početnu, nedeformisanu konfiguraciju, što znači da smo u okviru pristupa totalnog Langranžijana. Prema principu o stacionarnoj vrijednosti totalne potencijalne energije, potreban uslov da bi sistem bio u ravnoteži jeste da totalna potencijalna energija ima stacionarnu vrijednost, a dovoljan uslov je da ova energija bude u minimumu. Primjenom ovog principa, dobijamo jednačine ravnoteže:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = 0 \quad \delta \mathbf{q} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}(\mathbf{q}) - \mathbf{F} = 0, \quad (3)$$

gdje je $\boldsymbol{\Psi}$ vektor rezidualnih (neuravnoteženih) sila, \mathbf{R} vektor unutrašnjih čvornih sila a \mathbf{F} vektor spoljašnjeg opterećenja, ovdje usvojen kao nezavisan od pomjeranja. Izraz (3) predstavlja sistem od N nelinearnih jednačina sa N nepoznatih, gdje N predstavlja broj nezavisnih generalisanih pomjeranja sistema tj. broj stepeni slobode. Ovaj sistem se efikasno može riješiti sukcesivnom linearizacijom tako što se opterećenje dijeli u niz inkremenata pri čemu se u okviru svakog inkrementa nepoznata funkcija $\boldsymbol{\Psi}$ razvija u Tajlorov red. Slijedi da je za primjenu ovog postupka neophodno odrediti gradijent neuravnoteženih sila

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_T, \quad (4)$$

što kao rezultat daje tangentnu matricu krutosti.

Arc-length metod

S obzirom da konstrukcija tokom deformisanja može naići na granične tačke po opterećenju ili pomjeranju, neophodno je primijeniti odgovarajuću tehniku za rješavanje sistema (3). Ovdje se daje sažet prikaz linearizovanog *arc-length* metoda kako je izveden u [1]. Osnovna ideja metoda je u tom da se kao nova promjenljiva uvede faktor proporcionalnosti opterećenja λ , čime dobijamo sljedeći sistem:

$$\Psi(\mathbf{q}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{q}, \lambda) - \lambda \mathbf{F} = 0. \quad (5)$$

Zbog nove promjenljive, (5) predstavlja sistem od N jednačina sa $N+1$ nepoznatom te je neophodno formirati i novu jednačinu. U skladu sa uprošćenim linearizovanim *arc-length* pristupom, ova jednačina je

$$\Delta \mathbf{q}_p^T \delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{q}_p^T (\delta \bar{\mathbf{q}} + \delta \lambda \delta \mathbf{q}_t) = 0, \quad (6)$$

pri čemu se iterativni faktor opterećenja $\delta \lambda$ određuje kao

$$\delta \lambda = \frac{-\Delta \mathbf{q}_p^T \delta \bar{\mathbf{q}}}{\Delta \mathbf{q}_p^T \delta \mathbf{q}_t}, \quad (7)$$

gdje je $\Delta \mathbf{q}_p$ vektor inkrementalnog prediktorskog pomjeranja, $\delta \mathbf{q}_t$ vektor tangenčnih pomjeranja a $\delta \bar{\mathbf{q}}$ vektor iterativnih rezidualnih pomjeranja

$$\delta \bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{K}_T^{-1} \Psi \quad \delta \mathbf{q}_t = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}. \quad (8)$$

$\Delta \mathbf{q}_p$ se dobija kao razlika trenutnog i posljednjeg iskonvergirano pomjeranja. Nakon što se odredi novi faktor opterećenja, računaju se ažurirana opterećenja i provjerava se da li je jednačina (5) zadovoljena. Zbog numeričke prirode procedure, ravnoteža nikad nije zadovoljena, te se mora uvesti odgovarajući kriterij konvergencije. U ovom istraživanju je usvojen odnos euklidske norme vektora neuravnoteženih sila i vektora trenutnog spoljašnjeg opterećenja

$$\|\Psi\| / \|\lambda \mathbf{F}\| \leq \alpha, \quad (9)$$

gdje je α neka mala, unaprijed zadata, vrijednost. Obično se usvaja između 10^{-2} i 10^{-3} , u zavisnosti od posmatranog problema i tražene tačnosti. Predstavljeni postupak rješavanja se zasniva na prediktor (*predictor*) - korektor (*corrector*) tehnici u okviru koje *arc-length* iteracije vrše korekciju predviđenog (prediktorskog) rješenja definisanog kao

$$\Delta \lambda_p = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{q}_t^T \delta \mathbf{q}_t}}, \quad (10)$$

gdje je sa Δl data inkrementalna dužina luka. Problemu biranja znaka u jednačini (10) je posvećeno mnogo pažnje u literaturi [1].

Određivanje predznaka prediktorskog rješenja

Uspjeh predstavljene tehnike praćenja ravnotežne putanje suštinski zavisi od izbora odgovarajućeg znaka prediktorskog rješenja, odnosno iterativnog faktora opterećenja u jednačini (10). Tokom posljednje tri decenije predloženi su mnogi kriteriji koji bi tačno predvidjeli nastavak kretanja po ravnotežnoj putanji, tj. definisali znak prediktorskog rješenja tako da se ono ne vraća nazad po pređenoj putanji [1]. Dva najkorištenija kriterija su: 1) znak determinante trenutne tangentne matrice krutosti i 2) znak inkrementalnog prediktorskog rada. Prvi kriterij je veoma zastupljen u komercijalnim MKE kodovima i odlično funkcioniše u odsustvu bifurkacija. Ipak, pri pojavi bifurkacionih tačaka, ovaj kriterij najčešće otkazuje. Problem je u tome što se znak determinante \mathbf{K}_T mijenja sa prolaskom granične tačke ili bifurkacione tačke. Prediktor ne može razlikovati ove dvije značajno različite tačke, te je neophodno izvršiti dodatne proračune. U slučaju nailaska na bifurkacionu tačku, rješenje osciluje oko nje. Drugi kriterij nije ometen bifurkacijama, ali se pokazuje neefikasnim u slučaju pojave proloma unazad, gdje će predviđeni pozitivni nagib krive dovesti do vraćanja unazad i povećanja opterećenja.

Problem sa oba ova kriterija, kako je pojašnjeno u [5], jeste u tome što se baziraju samo na podacima koji definišu trenutnu ravnotežnu tačku, na početku inkrementa. S druge strane, Fangov kriterij [5] uzima u obzir i istoriju, tj. porijeklo ravnotežne putanje. Znak prediktorskog rješenja je usvojen kao znak unutrašnjeg proizvoda prethodno iskonvergirano inkrementalnog pomjeranja $\Delta \mathbf{q}_n$ i trenutnog tangentnog rješenja $\delta \mathbf{q}_t$

$$\text{sgn}(\Delta \lambda_p) = \text{sgn}(\Delta \mathbf{q}_n^T \delta \mathbf{q}_t). \quad (11)$$

Suštinska prednost ovog kriterija je u činjenici da u sebi nosi informaciju o istoriji trenutne ravnotežne putanje, što ga čini superiornim u odnosu na ostale.

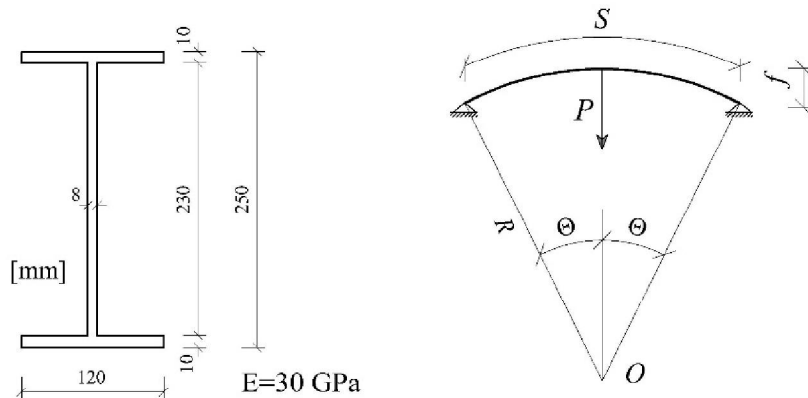
3. NUMERIČKI PRIMJER

Računarski kôd NEBO (Nelinearni Bernuli-Ojler), napisan u programskom paketu *Wolfram Mathematica* i predstavljen u [3], je unapređen uvođenjem opcije za rješavanje sistema nelinearnih jednačina primjenom linearizovanog *arc-length* metoda. Korištene su tangentne matrice krutosti i vektori neuravnoteženih sila u zatvorenom obliku za štap tipa k i štap tipa g . Takođe je ugrađena i automatska inkrementacija, tako da program formira veći ili manji inkrement opterećenja, zavisno od trenutne ravnotežne putanje [1]. NEBO sada pruža mogućnost geometrijski nelinearne statičke analize linijskih nosača u ravni koji dostižu obe vrste graničnih tačkaka.

U cilju provjere predstavljene procedure, detaljno je analiziran plitki kružni luk statičke sheme i poprečnog presjeka kao na slici 2. U pitanju je nastavak analize date u [3], gdje su ispitani granični slučajevi primjenljivosti postupka rješavanja jednačina samo sa kontrolom opterećenja. Varirani su granični uslovi i 'dubina' luka pri čemu je definisana geometrijska karakteristika luka

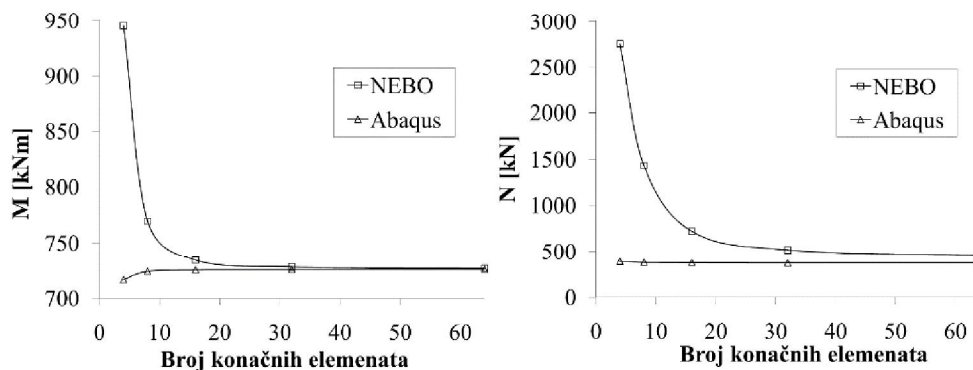
$$\lambda = \frac{R\Theta^2}{i_z} = \frac{S\Theta}{i_z} \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

Razmatrana su tri tipa graničnih uslova: obostrano slobodno oslonjen luk (*o-o*), obostrano uklješten (*u-u*) i luk s jedne strane slobodno oslonjen a s druge uklješten (*o-u*).



Slika 2. Poprečni presjek i statička shema posmatranog plitkog luka

Dobijeni rezultati su poređeni sa komercijalnim softverskim paketom Abaqus 6.10. Korišten je element B23 sa dva čvora i kubnom interpolacijom [6]. Ovaj element opisuje ponašanje Bernuli-Ojlerove grede u ravni zanemarujući efekte smicanja. Brzu konvergenciju rezultata dobijenih ovim elementom omogućavaju dodatni unutrašnji čvorovi.



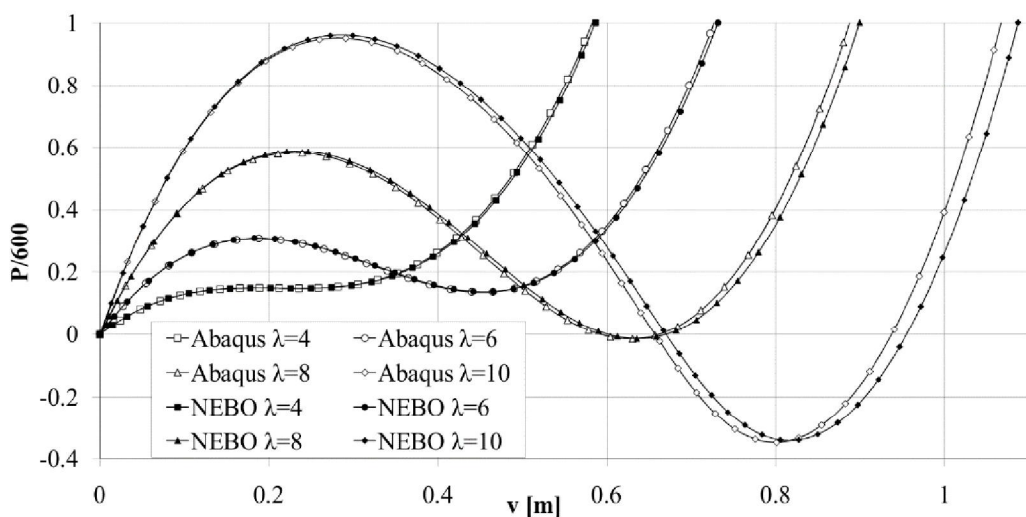
Slika 3. Konvergencija momenta i normalne sile *o-o* luka za $\lambda=6$

Prvo je izvršen test konvergencije posmatranih veličina. Brzina konvergencije momenta savijanja i normalne sile *o-o* luka za $\lambda=6$ usljed sile $P=600 \text{ kN}$ je data na slici 3. Očigledno je da rezultati dobijeni elementom B23 konvergiraju znatno brže u odnosu na one dobijene klasičnim elementom sa dva čvora, korištenim u programu NEBO. Na osnovu ovog testa usvojena je mreža od 32 konačna elementa za sve analizirane nosače.

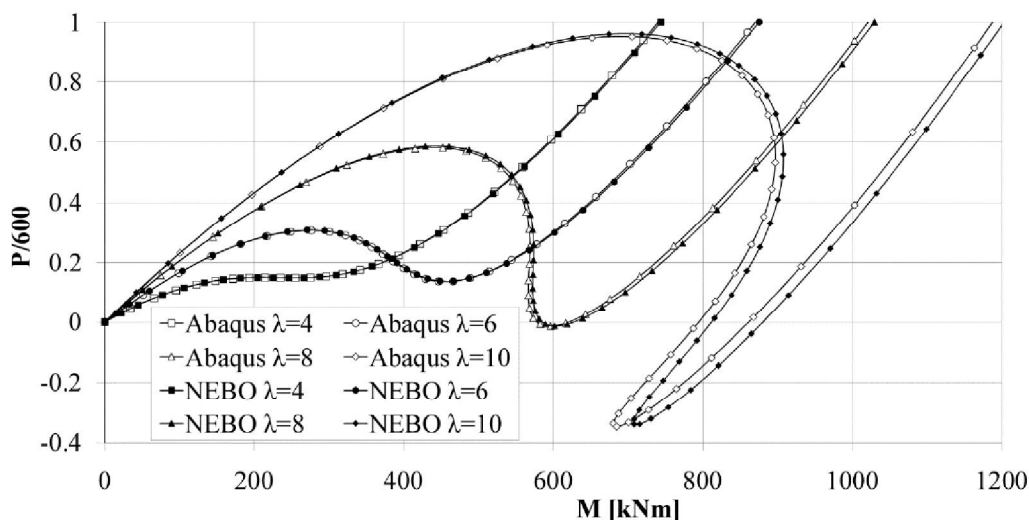
Prilikom analize *o-u* luka u Abaqusu, došlo je do problema numeričke prirode, te je mreža morala biti redukovana na 16 elemenata.

Prilikom definisanja geometrije nosača, dužina luka $S=10.05\text{ m}$ je fiksirana. Različite vrijednosti parametra λ su dobijene variranjem ugla Θ . S obzirom na fiksirano S , strijela koja odgovara posmatranim λ je: $f \approx 5\lambda\text{ [cm]}$.

Intenzitet zadate sile P zavisi od tipa oslanjanja. Tako je *o-o* luk opterećen sa silom od 600, *o-u* sa 2000 te *u-u* luk sa 2500 kN. Prilikom predstavljanja rezultata, intenzitet opterećenja je normiran.

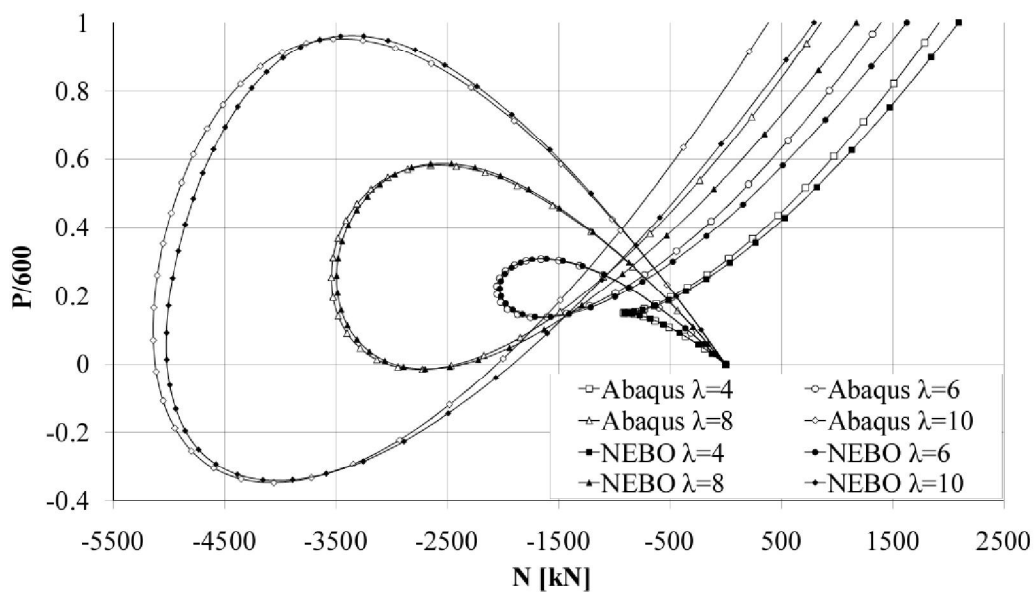


Slika 4. Ugib sredine *o-o* luka

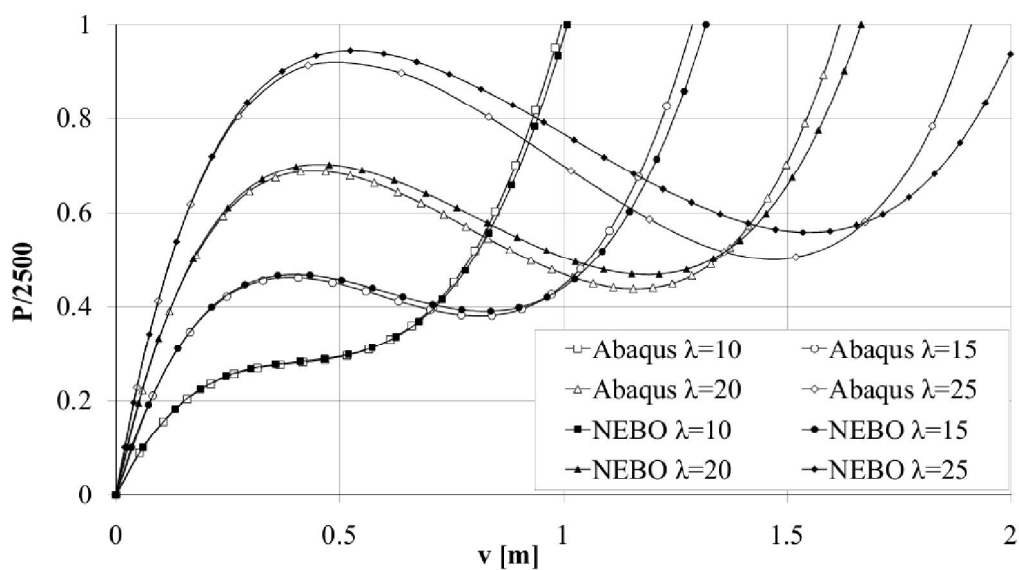


Slika 5. Moment savijanja sredine *o-o* luka

Na slikama 4, 5 i 6 se uočava odlično poklapanje rezultata Abaqus-NEBO za ugib, moment savijanja i normalnu silu u sredini *o-o* luka, za četiri vrijednosti parametra λ . Slike 7-10 prikazuju poređenje rezultata ugiba i momenta savijanja u sredini *u-u* i *u-o* luka.



Slika 6. Normalna sila u sredini *o-o* luka

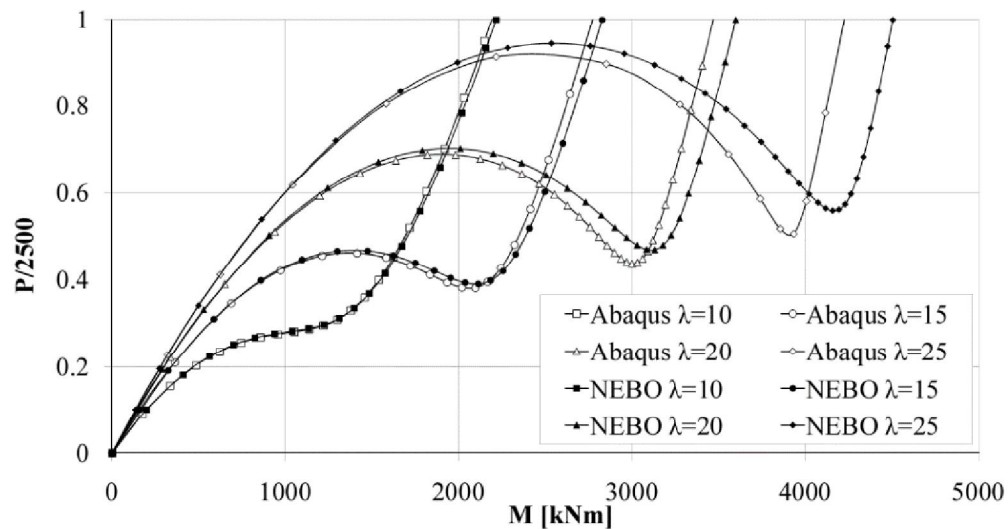


Slika 7. Ugib sredine *u-u* luka

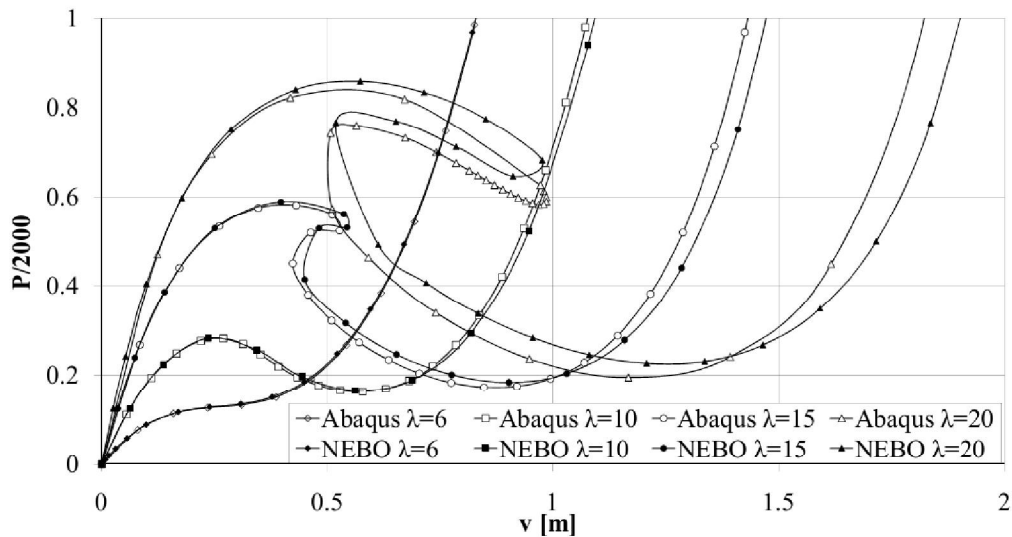
Diskusija dobijenih rezultata

Predstavljeni primjer je odabran tako da prikaže neophodnost korištenja *arc-length* metoda za proračun lukova specifičnih geometrijskih karakteristika, kako je pokazano u [3]. Lako se uočava granica dubine luka preko koje je neophodno primijeniti *arc-length* metod. Ona je $\lambda \approx 4$, $\lambda \approx 6$ i $\lambda \approx 10$ za *o-o*, *u-o* i *u-u* luk, redom.

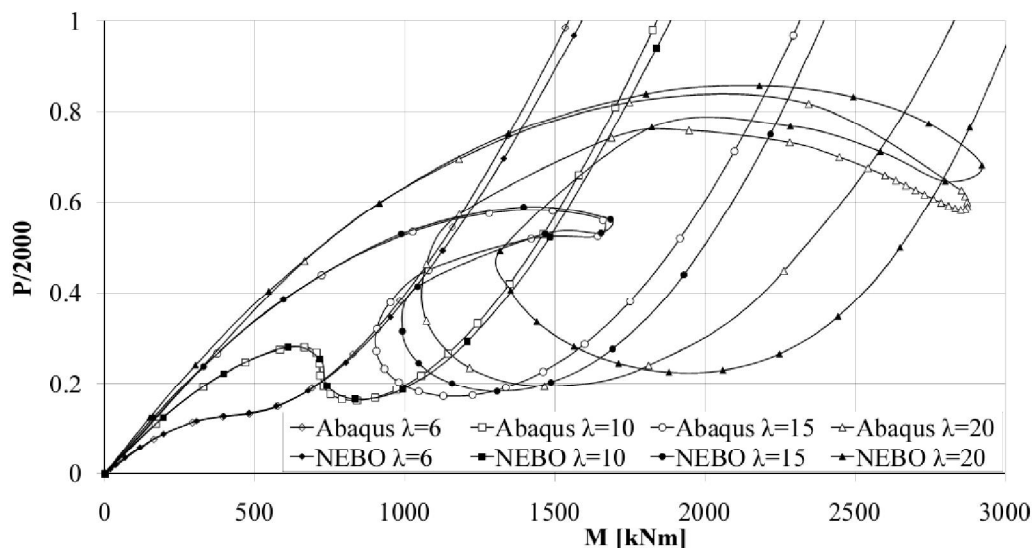
Interesantno je primijetiti da se samo kod *o-u* luka dešava prolom unazad. Takođe, može se uočiti da kod *o-o* luka povećanje parametra λ dovodi do povećanja vrijednosti opterećenja pri kojoj se javlja donja granična tačka po opterećenju, dok je kod *u-o* i *u-u* luka obrnuto.



Slika 8. Moment savijanja sredine u-u luka



Slika 9. Ugib sredine u-o luka



Slika 10. Moment savijanja u-o luka

Generalno gledano, rezultati Abaqus-NEBO se dobro slažu, pri čemu se razlike povećavaju sa parametrom λ . Uzrok tome je svakako povećanje kompleksnosti ravnotežnih putanja sa povećanjem 'dubine' luka. S obzirom da Abaqus i NEBO koriste različite konačne elemente, ali ipak zasnovane na istoj teoriji, razlika koja se javlja je značajna. Uzrok uočenih razlika može biti jedan od sljedećih: a) priroda usvojenih konačnih elementa je takva da za složene ravnotežne putanje daju različite rezultate; b) numerička priroda proračuna koja, kod kompleksnih putanja kao što je ona na slici 10, dovodi do toga da i Abaqus i NEBO imaju prilične teškoće pri konvergenciji; c) izostavljanje člana $u_{,x}^2$ u programu NEBO.

Predstavljeni primjer je interesantan sa teorijskog stanovišta, ali ne toliko i sa praktičnog. Naime, pri ovim nivoima presječnih sila realni građevinski čelik će već plastificirati, te je u proračun potrebno uključiti i efekte materijalne nelinearnosti. Predstavljeni primjer je odabran tako da se naglasi efekat geometrijske nelinearnosti. Kod realnih savremenih konstrukcija, geometrijska nelinearnost je manje izražena i često djeluje uporedo sa materijalnom.

4. ZAKLJUČAK

Građevinske konstrukcija tokom eksploatacije mogu dostići granične tačke po opterećenju i/ili pomjeranju. Stoga je prilikom proračuna neophodno primijeniti procedure koje mogu opisati ovakvo ponašanje.

Predstavljeni pristup rješavanja nelinearnih jednačina ravnoteže primjenom *arc-length* metoda daje dobre rezultate. Korišteni su vektor neuravnoteženih sila i tangentna matrica krutosti u zatvorenom obliku što znatno pojednostavljuje i ubrzava proceduru. Fangov kriterij za određivanje znaka prediktorskog rješenja se pokazuje kao neosjetljiv na bifurkacione tačke, a može opisati i prolom unazad, što ga čini trenutno najboljim izborom.

Numerički primjer pokazuje da opisana procedura sa zadovoljavajućom tačnošću opisuje geometrijski nelinearno ponašanje određenih klasa građevinskih konstrukcija. U daljnjem istraživanju, posebna pažnja će se posvetiti otkrivanju uzroka neslaganja u rezultatima Abaqus-NEBO za određene geometrije.

Zahvalnost

Istraživanje predstavljeno u ovom radu je dijelom podržano od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije; broj projekta: TP 36008.

LITERATURA

- [1] M. A. Crisfield, Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, John Wiley & Sons, Chichester, **2000**.
- [2] A. Borković, Geometrijski nelinearna analiza linijskih nosača u ravni - I dio: izvođenje jednačina, Zbornik radova građevinskog fakulteta, Subotica, **2012**, 5-17
- [3] A. Borković, Geometrijski nelinearna analiza linijskih nosača u ravni - II dio: primjeri, Zbornik radova građevinskog fakulteta, Subotica, **2012**, 27-38
- [4] G. Radenković, Statika linijskih nosača, Građevinska knjiga, Beograd, **2011**.
- [5] E. A. de Souza Neto, Y. T. Feng, On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snap-backs', Computer methods in applied mechanics and engineering, 179, **1999**, 81-89
- [6] Abaqus, Theory manual, version 6.7, Dassault systemes, **2007**.

ANALYSIS OF SNAP BEHAVIOR OF SHALLOW PLANE ARCHES USING THE ARC-LENGTH METHOD

Summary: *This paper gives continuation of geometric nonlinear analysis presented in former papers. Phenomenons of snap-through and snap-back can occur during nonlinear analysis of shallow arches, for specific geometries and loadings. Considering that throughout this complex equilibrium paths structure can reach both loading and displacement limit points, classical Newton-Raphson schemes based only on loading or displacement control are no longer applicable. Arc-length method for plane frames is presented here in order to describe this phenomenon with the usage of classical Bernoulli-Euler beam element. Calculation is made using the total Lagrangian approach. Vector of unbalanced forces and tangent stiffness matrix are derived in its closed-form, which significantly saves calculation time usually required for numerical integration. Special attention is paid to determination of sign of predictor solution at the beginning of each increment. Presented approach is programmed into Wolfram Mathematica. Detailed numerical example is given at the end. Comparison of results obtained with presented approach and the ones from commercial FEM software Abaqus is given.*

Keywords: *Arc – length metod, shallow arches, Bernoulli – Euler beam*