

# SLOBODNE VIBRACIJE OJAČANIH TANKOZIDNIH NOSAČA PRIMJENOM METODA KONAČNIH TRAKA SA PODUŽNIM I POPREČNIM UKRUĆENJIMA

Aleksandar Borković<sup>1</sup>

UDK: 624.073.8 : 534-16

DOI: 10.14415/zbornikGFS22.001

**Rezime:** U radu se daje jedan pristup analizi slobodnih vibracija ojačanih tankozidnih nosača. Primijenjen je metod složenih traka kod koga se za aproksimaciju pomjeranja u podužnom pravcu koriste trigonometrijski redovi, a u poprečnom pravcu polinomi. Zbog svoje poluanalitičke prirode, ovaj metod obećava tačnije rezultate za određene klase konstrukcija u odnosu na čisto numeričke postupke kao što je metod konačnih elemenata. Predstavljeni postupak unapređuje klasični metod konačnih traka uvodeći mogućnost modeliranja tankozidnih nosača sa podužnim i poprečnim ukrućenjima. Uticaj ukrućenja se uvodi u konačnu traku preko odgovarajućih krutosnih i inercijalnih karakteristika čime se dobija složena traka. Ovakav pristup omogućava efikasan proračun ojačanih tankozidnih konstrukcija bez potrebe za uvođenjem dodatnih stepeni slobode koji bi opisivali ponašanje ukrućenja. Jedino ograničenje jeste da ukrućenja moraju biti vitke grede čije se polje pomjeranja može definisati na osnovu pomjeranja samo jedne linije. Opisana procedura je programirana u softverskom paketu Wolfram Mathematica, te je na kraju dat odgovarajući numerički primjer. Kroz poređenje sa komercijalnim programom Abaqus izvršena je verifikacija predstavljenog pristupa.

**Ključne riječi:** Slobodne vibracije, ojačani tankozidni nosači, metod složenih traka.

## 1. UVOD

Ojačani tankozidni nosači se često koriste u savremenim inženjerskim konstrukcijama. Tokom svog radnog vijeka često su izloženi dinamičkom opterećenju, te je dinamička analiza ovih konstrukcija od velikog interesa. Da bi se kvalitetno sproveda dinamička analiza, prvo je neophodno odrediti osnovne dinamičke karakteristike sistema: svojstvene frekvencije, oblike i prigušenja. S obzirom na to da analitičko rješenje za ove konstrukcije ne postoji, vremenom su razvijeni mnogi metodi koji se zasnivaju na diskretizaciji domena: metod konačnih elemenata (MKE), metod konačnih traka (MKT), metod graničnih elemenata itd. MKE je trenutno nesumnjivo najopštiji i najtačniji. Ipak, poluanalitički metodi, kao što je MKT, se mogu pokazati kao znatno prikladniji za analizu 'dugačkih' prizmatičnih konstrukcija [1]. Nemogućnost modeliranja unutrašnjih oslonaca i ukrućenja u okviru MKT je prevaziđena uvođenjem metoda složenih traka (MST). Ovaj metod je uspješno primijenjen na analizu slobodnih vibracija [2] i dinamičku analizu [3] ukrućenih ploča. U cilju njegove primjene na ukrućene tankozidne

<sup>1</sup> mr Aleksandar Borković, dipl. inž. građ, Arhitektonsko-građevinsko-geodetski fakultet Banjaluka, Vojvode Stepe Stepanovića 77/3, tel: +38765917366, e-mail: [aborkovic@agfbl.org](mailto:aborkovic@agfbl.org)

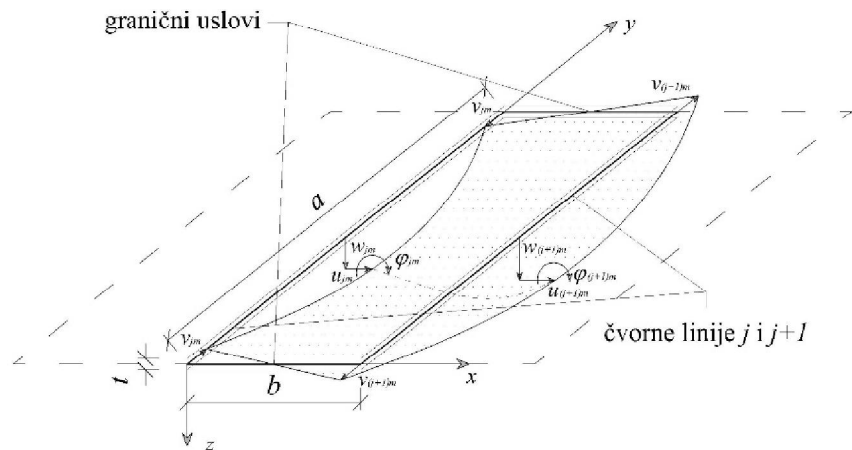
konstrukcije, razvijen je pristup za analizu slobodnih vibracija slobodno oslonjenih ukrućenih tankozidnih nosača [4]. Ovdje je postupak unapređen uvođenjem različitih graničnih uslova koristeći funkcije predložene u [5]. Predstavljeni metod je pogodan za analizu slobodnih vibracija tankozidnih nosača ukrućenih sa podužnim i poprečnim ukrućenjima (PUU i PPU). MST baziran na Kirchhoff-Love teoriji savijanja tankih ploča je razvijen i kodiran u softverskom paketu Wolfram Mathematica (WM). Na kraju je dat detaljan primjer uporedne analize MKE/MST jednog ojačanog tankozidnog nosača.

## 2. INTERPOLACIONE FUNKCIJE KONAČNE TRAKE

Interpolaciona funkcija slobodno oslonjene konačne trake nižeg reda sa dvije čvorne linije (*low order strip* - LO2 traka), za prvi član reda, je prikazana na slici 1. Ova traka je pogodna za analizu prizmatičnih ljuski [1], među koje možemo svrstati i tankozidne nosače čija osa je prava linija. LO2 traka ima četiri stepena slobode po čvornoj liniji i zasnovana je na Kirchhoff-Love teoriji. Slijedi da se komponente pomjeranja svih tačaka mogu predstaviti u funkciji pomjeranja tačaka srednje ravni ploče. U skladu sa navedenim, polje pomjeranja se aproksimira sljedećim redovima:

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) Y_m(y) \quad v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x) Y_m^v(y) \quad w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x) Y_m(y) \quad (1)$$

gdje su  $Y_m$  bazne funkcije koje se obično uzimaju kao svojstveni oblici oscilovanja Bernuli-Ojlerove grede - S funkcije [1, 3]. One su dobro poznate i ovdje se izostavljaju. Međutim, u [5] su predložene nešto drugačije - B funkcije (tabela 1), gdje je  $m=1,2,3...$  Prednost B funkcija je njihova jednostavnost a S funkcija njihovo jasno fizičko značenje. U ovom istraživanju razmatraju se četiri tipa trake: obostrano slobodno oslonjena (O-O), obostrano uklještena (U-U), s jedne strane uklještena a s druge slobodno oslonjena (U-O) i s jedne strane uklještena a s druge slobodna (U-S). Zbog numeričke nestabilnosti S funkcija [6], za sve uslove oslanjanja različite od O-O, analiza se mora ograničiti na relativno mali broj članova reda ili se mora napraviti izuzetno rigorozan numerički pristup. Za konvergenciju rješenja po MST, kada model sadrži PPU ili koncentrisana opterećenja, potreban je znatan broj članova reda. Zato su ovdje korištene B funkcije koje ne izazivaju numeričke probleme na višim članovima reda.



Slika 1. Interpolaciona funkcija O-O konačne trake za  $m=1$

Tabela 1. B funkcije

Granični uslov	Interpolaciona funkcija $Y_m(y)$
U-U	$\sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$
U-O	$\sin \frac{(m+1)\pi y}{a} + \left(\frac{m+1}{m}\right) \sin \frac{m\pi y}{a}$
U-S	$1 - \cos \frac{(m-1/2)\pi y}{a}$

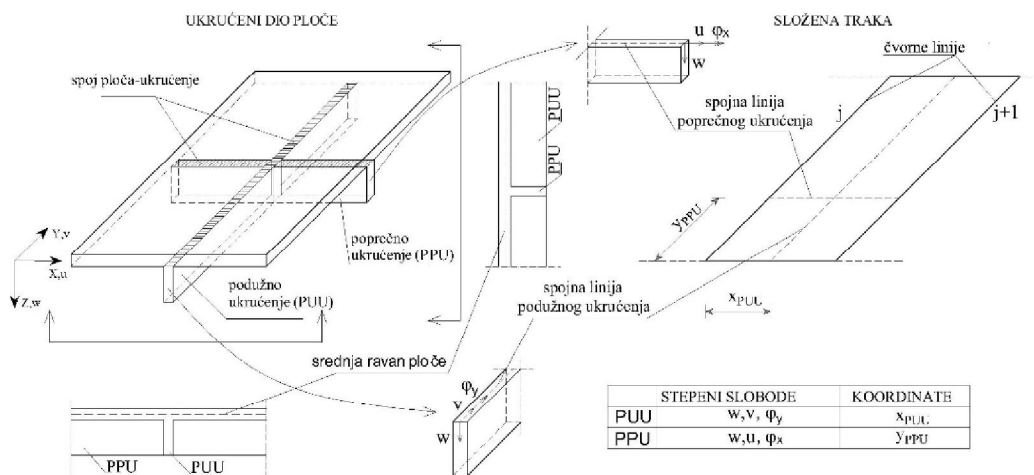
Funkcija  $Y_m^v$  je jednaka normiranoj vrijednosti  $dY_m/dy$ ; poprečne funkcije  $u_m(x)$ ,  $v_m(x)$  i  $w_m(x)$  se dobijaju kao proizvod polinoma i parametara pomjeranja. U ovom radu su korišteni kubni polinomi za aproksimaciju pomjeranja upravno na traku i linearni za aproksimaciju u ravni trake:

$$\begin{aligned}
 u_{0m}(x) &= (1-\xi)u_{jm} + \xi u_{(j+1)m} = \mathbf{N}_u^T \mathbf{q}_{um}^u; & v_{0m}(x) &= (1-\xi)v_{jm} + \xi v_{(j+1)m} = \mathbf{N}_u^T \mathbf{q}_{um}^v; \\
 w_m(x) &= (1-3\xi^2 + 2\xi^3)w_{jm} + (x-2b\xi^2 + b\xi^3)\varphi_{jm} + \\
 &+ (3\xi^2 + 2\xi^3)w_{(j+1)m} + (-b\xi^2 + b\xi^3)\varphi_{(j+1)m} = \mathbf{N}_w^T \mathbf{q}_{wm}; & \xi &= x/b.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Nakon što je definisano polje pomjeranja, standardnim postupkom se definišu energija deformacije i kinetička energiju sistema [1].

### 3. SLOŽENA TRAKA

Ploča ukrućena sa PPU i PUU prema MST modelu je prikazana na slici 2. Kompatibilnost pomjeranja između ukrućenja i ploče je ostvarena duž njihove spojne linije koja leži u srednjoj ravni ploče.



Slika 2. Ploča sa ukrućenjima - složena traka



Slijedi da se polje pomjeranja ukrućenja izvodi iz polja pomjeranja trake. Ovo je jedna od prednosti MST jer se ne uvode novi stepeni slobode za opisivanje ponašanja ukrućenja, za razliku od MKE.

Energija deformacije i kinetička energija ukrućenja se izvode na analogan način kao i energije trake [3]. Ukrućenje se posmatra kao degenerisana traka i integracija se vrši samo duž njegove ose. Na slici 3 su prikazane karakteristike tipičnog pravougaonog ukrućenja, mjereno u odnosu na spojnu liniju. Tačnost pristupa umnogome zavisi od kvaliteta aproksimacije polja pomjeranja 3D ukrućenja na osnovu pomjeranja samo jedne spojne linije. Ova aproksimacija je valjana za klasičnu vitku 3D Bernuli-Ojlerovu gredu.

Karakteristika ukrućenja mjerena u odnosu na spojnu liniju		
	krutosna	inercijalna
aksijalna	$E_x F_x = E_x B H$	$\rho F_y = \rho B H$
savijajuća	$E_x I_y = E_x \left( \frac{B H^3}{12} + B H \frac{H^2}{4} \right)$	$\rho I_y' = \rho B H$
torziona	$G_{xy} J = G_{xy} \left[ \frac{H B^3}{3} - \frac{64 B^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{tgh} \left( \frac{n \pi H}{2 B} \right) \right]$	$\rho J_{\text{mrc}} = \rho B H \left( \frac{H^2}{3} + \frac{B^2}{12} \right)$

Slika 3. Krutosne i inercijalne karakteristike tipičnog ukrućenja

### Problem svojstvenih vrijednosti

Primjenom Hamiltonovog principa, dobijaju se jednačine kretanja sistema konačnih traka. Matrice krutosti i masa slijede iz energije deformacije i kinetičke energije mehaničkog sistema, redom [1]. Posmatrajući sistem bez opterećenja i prigušenja, problem slobodnih vibracija se opisuje sistemom homogenih jednačina

$$(\mathbf{M} + \lambda \mathbf{K})\mathbf{q} = 0 \quad (3)$$

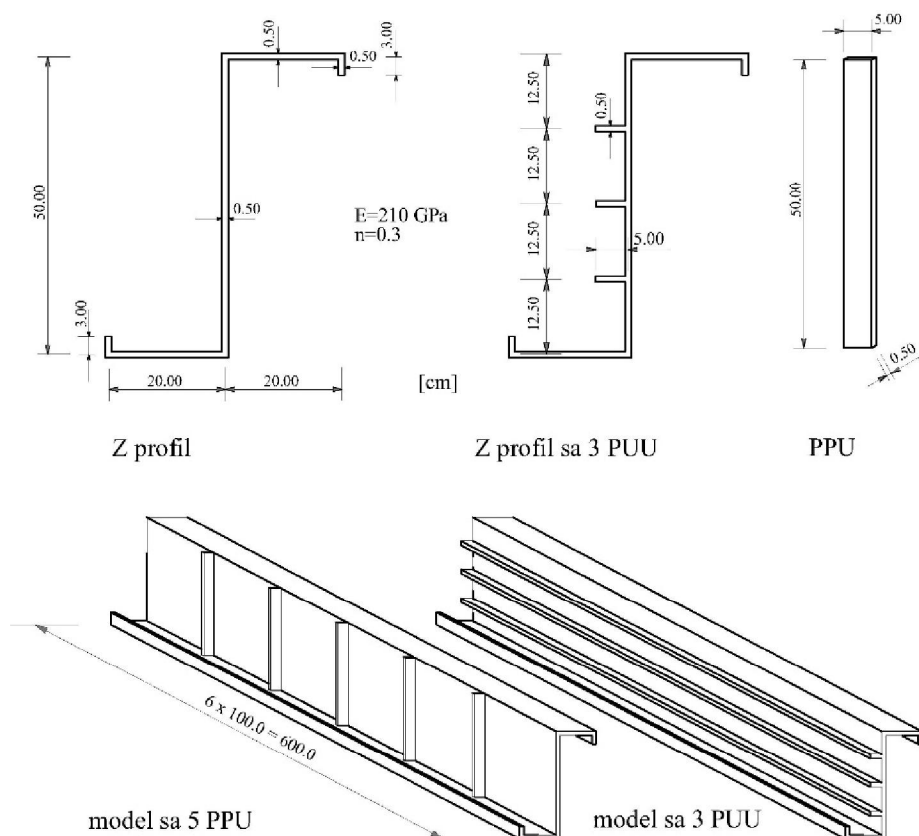
gdje je  $\mathbf{K}$  matrica krutosti,  $\mathbf{M}$  matrica masa,  $\mathbf{q}$  vektor generalisanih parametara pomjeranja u čvornim linijama, a  $\lambda$  skalar proporcionalan svojstvenim frekvencijama sistema. Ovaj sistem jednačina predstavlja problem svojstvenih vrijednosti čija su rješenja svojstvene frekvencije i svojstveni vektori oscilovanja mehaničkog sistema [7].

## 4. NUMERIČKI PRIMJER

Na osnovu izloženog postupka, u WM je napisan računarski kôd nazvan SVUK (Slobodne Vibracije Ukrućenih Konstrukcija). U odnosu na kod predstavljen u [4], SVUK je unapređen uvođenjem mogućnosti za analizu različitih uslova oslanjanja. Ugrađena je opcija biranja između S i B funkcija, pri čemu S funkcije obuhvataju i S-S i O-S granične uslove. Ovdje predstavljeni rezultati su dobijeni korištenjem isključivo B funkcija.

U cilju verifikacije predstavljenog pristupa, analizirana su dva modela ojačane tankozidne grede Z profila, karakteristika datih na slici 4. Upoređeni su rezultati dobijeni primjenom programa SVUK i komercijalnog MKE paketa Abaqus. Za analizu je

korišten STRI3 konačni element, kao jedini u Abaqusovoj biblioteci koji nameće Kirchhoff-Love pretpostavke analitički [8]. U pitanju je ravni trougaoni element ljuske sa po šest stepeni slobode u čvoru.



Slika 4. Dva modela ukrućene grede Z profila

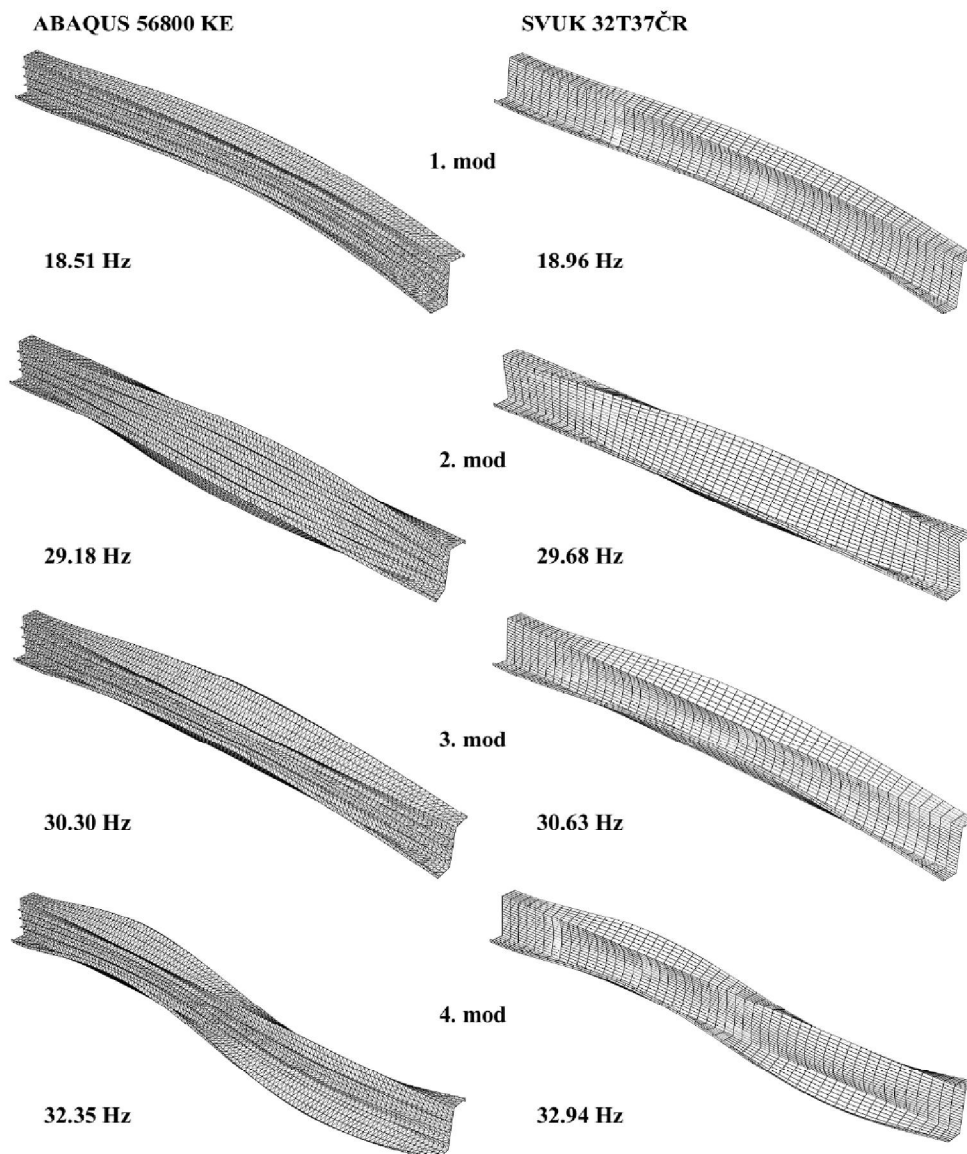
Na slikama 5-8 su prikazani i upoređeni dobijeni rezultati za dva tipa oslanjanja: U-U i U-O. Takođe je ispitana konvergencija oba metoda i predstavljena na slikama 9-11. Oznaka za model sa  $n$  traka i  $m$  članova reda u programu SVUK je  $nTm\check{C}R$ . Mreža koja je korištena za grafičko predstavljanje svojstvenih oblika dobijenih u Abaqusu je znatno rjeđa nego ona sa kojom su dobijene date numeričke vrijednosti. Ovo je urađeno jer bi slika svojstvenog oblika bila nejasna zbog velike gustine konačnih elemenata.

### Diskusija dobijenih rezultata

Iz predstavljenih rezultata očigledno je da SVUK i Abaqus daju skoro identične svojstvene frekvencije i oblike. Najveća relativna razlika se javlja kod modela sa PPU i to u trećem modu, oko 4 %. Kod modela sa PUU, najveća relativna razlika je oko 2.4 %, na prvom modu. S druge strane, neke frekvencije se razlikuju samo u promilima, recimo prva dva moda U-U grede sa PPU. Odlično poklapanje je svakako posljedica i pažljivo odabranog primjera sa vitikim ukrućenjima, gdje efikasnost MST dolazi do izražaja.

Poređenjem rezultata za U-O i U-U nosače sa PUU uočavamo da U-U greda ima prvu frekvenciju za oko 24 % veću nego U-O greda, dok je za više tonove uticaj graničnog uslova dosta manji. Kod U-O grede, dva polutalasa se javljaju tek u četvrtom modu, dok se za U-U granične uslove formiraju već u trećem.

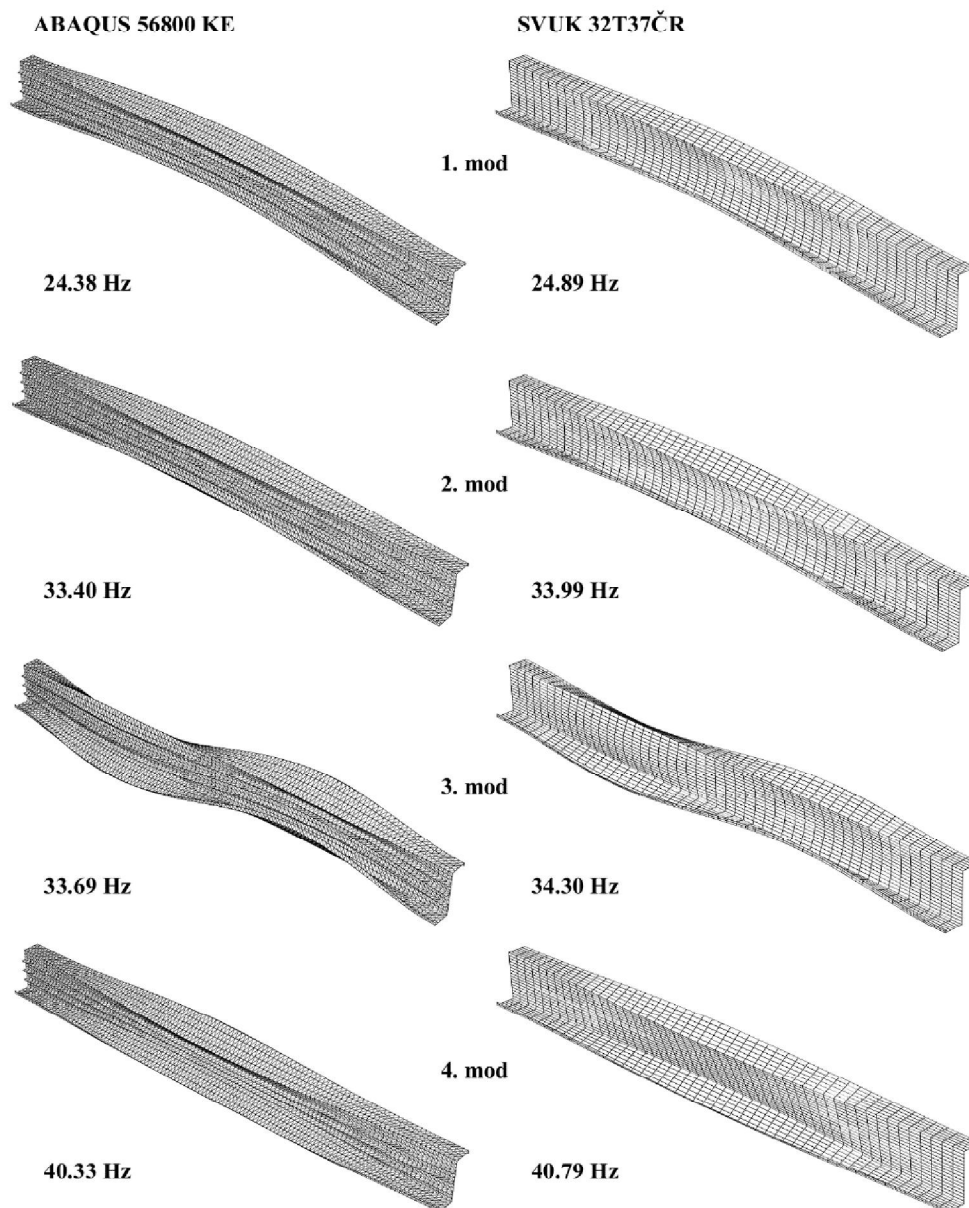
Posmatrajući modele sa PPU, uočavamo da su dvije najniže frekvencije U-U grede skoro 30% više od istih U-O grede, da bi ova razlika skoro nestala u četvrtom modu. Za razliku od nosača sa PUU, ovdje se dva polutalasa kod oba tipa oslanjanja javljaju u četvrtom modu. Uticaj poprečnih ukrućenja je jasno izražen na modalnim oblicima, izuzev kod drugog moda za oba tipa ograničnih uslova. Naime, drugi mod je čisto torzioni te se presjek rotira kruto.



Slika 5. Poređenje prva četiri moda U-S grede sa podužnim ukrućenjima



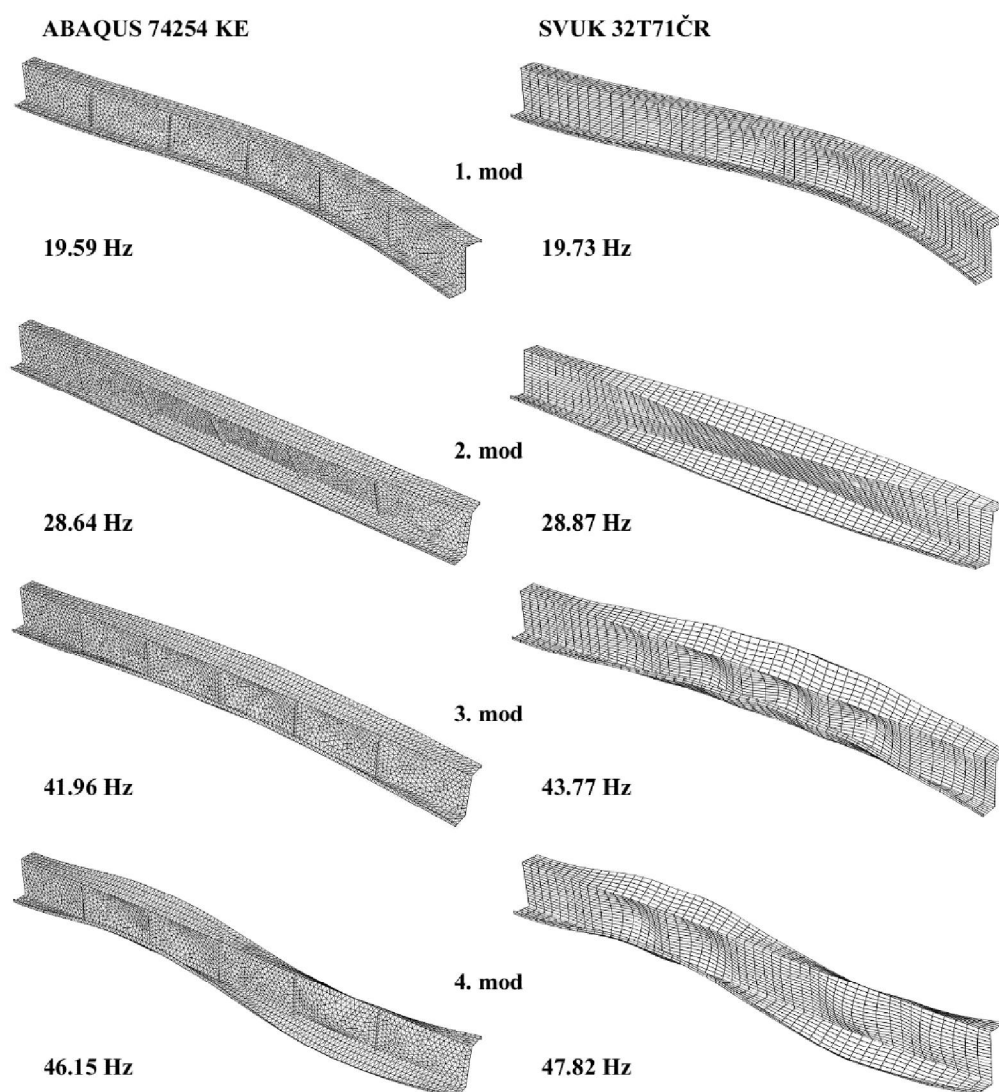
Na slici 9 se vidi da prve dvije frekvencije konvergiraju skoro trenutno, dok za više modove treba veći broj članova reda, i do 71. Primjećuje se da za konvergenciju svih frekvencija treba skoro isti broj konačnih traka, slika 10. Interesantno je da frekvencije skoro trenutno konvergiraju u odnosu na broj konačnih traka. Uzrok ovome je vjerovatno geometrija odabranog primjera. Naime, dužina je dominantna u odnosu na dimenzije poprečnog presjeka. Na slici 11 se vidi da su rezultati u Abaqusu iskonvergirali sa oko 10000 konačnih elemenata.



*Slika 6. Poređenje prva četiri moda U-U grede sa podužnim ukrućenjima*

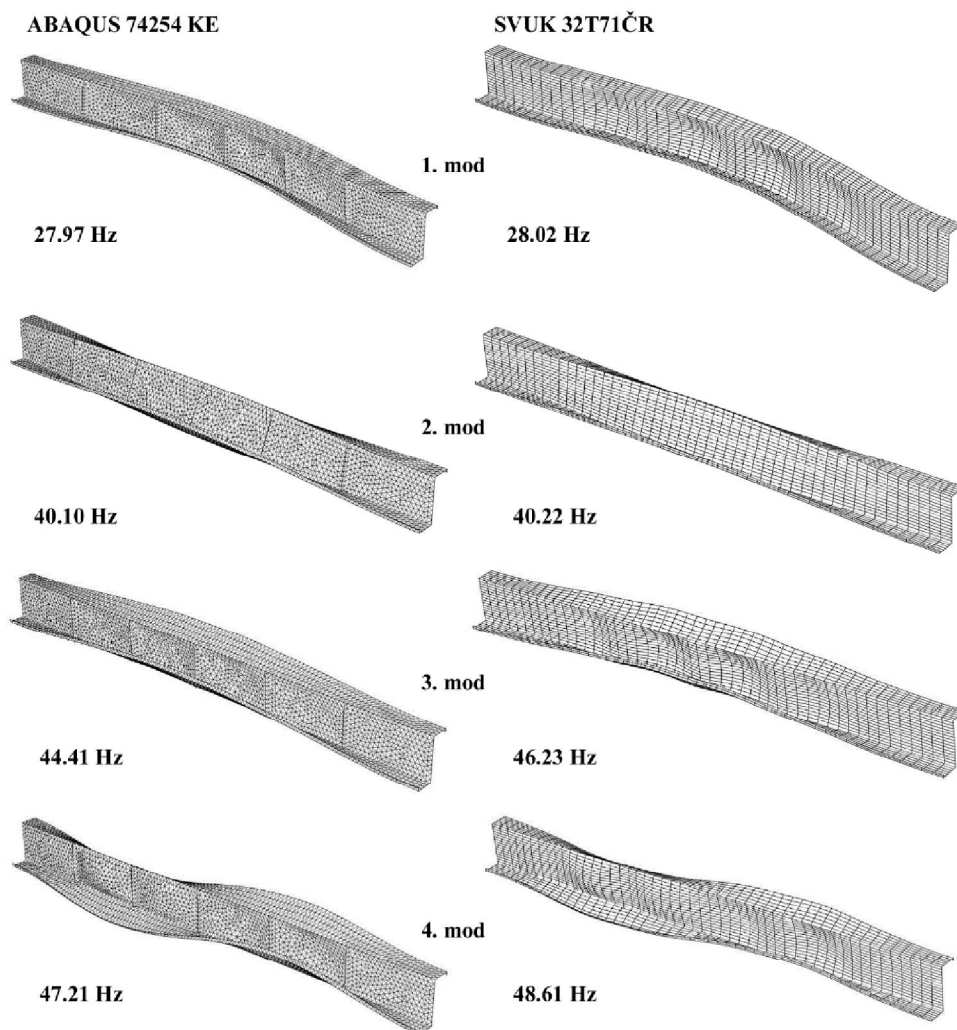
Frekvencije na slikama 5-8 su date za znatno gušće diskretizacije nego što je potrebno na osnovu testa kovergencije. Međutim, u cilju preciznog poređenja pristupa MST i MKE, namjerno su dati rezultati sa nešto većim stepenom tačnosti.

Rezultati u Abaqusu brzo konvergiraju, ali zahtijevaju i angažovanje velikog broja stepeni slobode. Tipičan razmatrani model u Abaqusu sa 10000 konačnih elemenata ima oko 5000 čvorova što daje 30000 stepeni slobode. S druge strane, SVUK model je iskonvergirao već za 16 traka i 51 član reda što čini svega  $16 \times 4 \times 51 = 3264$  stepeni slobode uključenih u analizu. Slijedi da je MST modelu potrebno skoro deset puta manje stepeni slobode za dostizanje nivoa tačnosti MKE modela. Naravno, ova analiza je specifična samo za predstavljeni primjer. Potrebna je jedna opsežna parametarska analiza za donošenje generalnih zaključaka.

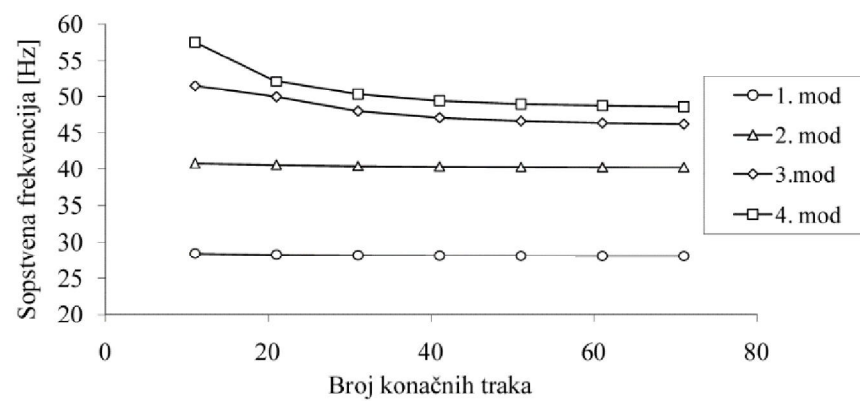


*Slika 7. Poređenje prva četiri moda U-S grede sa poprečnim ukrućenjima*

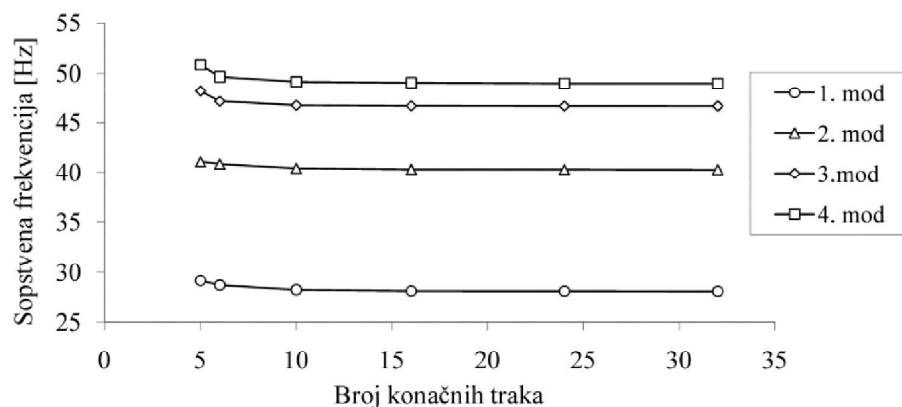




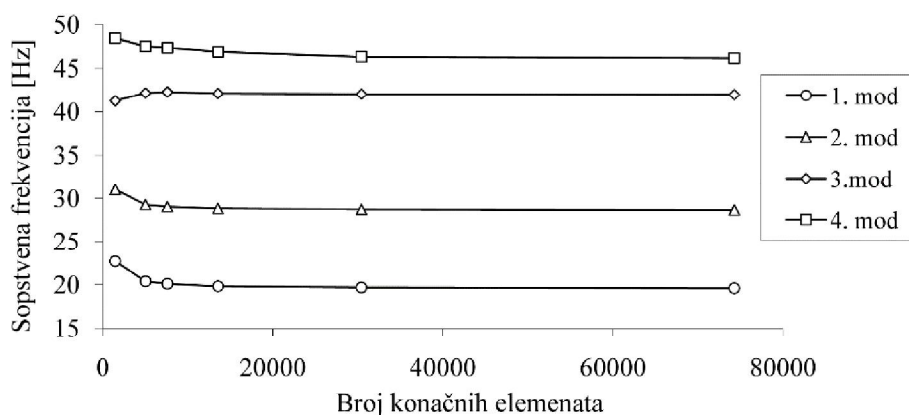
Slika 8. Poređenje prva četiri moda U-U grede sa poprečnim ukrućenjima



Slika 9. Konvergencija sopstvenih frekvencija U-U grede sa PPU za 32TmČR - SVUK



Slika 10. Konvergencija sopstvenih frekvencija U-U grede sa PPU za nT51ČR - SVUK



Slika 11. Konvergencija sopstvenih frekvencija U-S grede sa PPU - Abaqus

## 5. ZAKLJUČAK

Iz predstavljenih rezultati može se zaključiti MST daje uporedive rezultate u analizi slobodnih vibracija ukrućenih tankozidnih nosača. Glavne prednosti MST su značajno manji broj stepeni slobode uključenih u analizu i elegantan način modeliranja ukrućenja. Uvođenje ukrućenja ne zahtijeva definisanje novih stepeni slobode, već se polje pomjeranja ukrućenja izvodi iz pomjeranja trake. Nedostak metoda je zanemarivanje interakcije ukrućenja, što može biti važno za neke specifične probleme.

Poluanalitička aproksimacija polja pomjeranja je pogodna za konstrukcije regularne geometrije, gdje se čisto numerički metodi pokazuju manje efikasnim. Daljnje istraživanje će se bazirati na uvođenju ukrućenja proizvoljne ose i poprečnog presjeka.

### Zahvalnost

Istraživanje predstavljeno u ovom radu je dijelom podržano od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije; broj projekta: TP 36008.

## LITERATURA

- [1] Milašinović, D.D., The Finite Strip Method in Computational Mechanics, Faculties of Civil Engineering, Subotica, Budapest, Belgrade, Birografika, **1997**.
- [2] Puckett, J.A., Lang, J.G., Compound strip method for free vibration analysis of continuous plates, Journal of Engineering Mechanics, vol. 112, no. 12, p. 1375-1389, **1986**.
- [3] Borković, A., Mrđa, N., Kovačević, S., Dynamical analysis of stiffened plates using the compound strip method, Engineering Structures, vol. 50, p. 56-67, **2013**.
- [4] Borković, A., Free vibration analysis of stiffened thin-walled structures, 11th International Conference on Accomplishments in Electrical and Mechanical Engineering and Information Technology DEMI 2013, Banjaluka, **2013**.
- [5] Bradford M. A., Azhari M., Buckling of plates with different end conditions using the finite strip method, Computers & Structures, 56 (1), 75-83, **1995**.
- [6] Yu Tang, Numerical Evaluation of Uniform Beam Modes, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 129, No. 12, 1475-1477, **2003**.
- [7] Wilson, E.L., Static and dynamic analysis of structures, Computers and Structures, Berkeley, **2002**.
- [8] Abaqus, Theory manual, version 6.7. Dassault systems, **2007**.

## FREE VIBRATION ANALYSIS OF STIFFENED THIN-WALLED STRUCTURES USING THE COMPOUND STRIP METHOD

**Summary:** *This paper presents one approach for free vibration analysis of stiffened thin-walled structures. The compound strip method, which uses trigonometric series in longitudinal, and polynomials in transverse direction for approximation of displacement field, is used for analysis. Because of semi-analytical nature of procedure, this method promises more accurate results than purely numerical methods, such as the finite element method.*

*Method improves classic finite strip method via introduction of possibility for modeling thin-walled structures with longitudinal and transverse stiffeners. Influence of stiffeners is introduced through their interface lines via appropriately calculated rigidity and inertial properties. This approach allows efficient calculation of stiffened thin-walled structures without the need for additional degrees of freedom for description of stiffener behavior. Only restriction is that stiffener must be slender beam, whose displacement field can be described through displacement of just one line. Given approach is programmed in software package Wolfram Mathematica with the appropriate numerical example given at the end. Presented method is verified through comparison with commercial finite element package Abaqus.*

**Keywords:** *Free vibration, stiffened thin-walled structures, compound strip method.*