

# MATEMATIČKO MODELISANJE 1D NEUSTALJENOG TEČENJA U OTVORENIM TOKOVIMA

Mirjana Isić<sup>1</sup>,  
Miodrag Spasojević<sup>2</sup>

UDK: 532.522:167.7

**Rezime:** U radu su prikazani razvoj i testiranje modela za linijsko neustaljeno tečenje u granatoj mreži kanala sa „unutrašnjim“ graničnim uslovima. Von-Neumann-ova analiza stabilnosti Preissmann-ove šeme je sprovedena za linearizovane jednačine tečenja. Numeričko rešenje de St. Venant-ovih jednačina je testirano na osnovu serije numeričkih eksperimenata, pri čemu su, između ostalog, korišćeni i standardni ASCE testovi. U model granate mreže kanala su uključeni i testirani „unutrašnji“ granični uslovi. „Unutrašnji“ granični uslovi su testirani tako što je proveravano da li svaki od njih zadovoljava odgovarajuće hidrauličke zavisnosti za niz situacija neustaljenog tečenja.

**Ključne reči:** linijski model, neustaljeno tečenje, granata mreža tokova, „unutrašnji“ granični uslovi.

## 1. UVOD

U radu se razmatra model linijskog neustaljenog tečenja u granatoj mreži kanala gde su od „unutrašnjih“ graničnih uslova obuhvaćeni retenzija, prag i ustava. Model je napravljen primenom Preissmann-ove šeme koja je prethodno testirana Von Neumann-ovom analizom stabilnosti na pojednostavljenim jednačinama. Sam model je testiran primenom standardnog ASCE testa i pomoću odgovarajućih hidrauličkih zavisnosti.

## 2. VON NEUMANN – OVA ANALIZA STABILNOSTI ZA LINEARIZOVANE JEDNAČINE TEČENJA

Primenom de St. Venant-ovih pretpostavki na jednačine tečenja dobijene su jednačine koje opisuju jednodimenzionalno neustaljeno strujanje u otvorenim tokovima, jednačina kontinuiteta i dinamička jednačina (1).

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{Q^2}{A} \right) + gA \left( \frac{\partial h}{\partial x} - S_0 \right) + gAS_f = 0 \quad (1)$$

<sup>1</sup> Mirjana Isić, dipl. građ. inž. – master, Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel: 554 – 300, e – mail: [jsicm@gf.uns.ac.rs](mailto:jsicm@gf.uns.ac.rs)

<sup>2</sup> Dr. Miodrag Spasojević, dipl. građ. inž., Građevinski fakultet Subotica, Kozaračka 2a, tel: 554 – 300, e – mail: [mspasojevic@gf.uns.ac.rs](mailto:mspasojevic@gf.uns.ac.rs)

Von Neumann-ova analiza stabilnosti važi za linearne parcijalne diferencijalne jednačine zbog čega je prikazane jednačine potrebno linearizovati. Linearizacijom se dobija

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Dobijen je linearan sistem od dve parcijalne diferencijalne jednačine (2). Kako je dobijeni sistem linearan, rešenje se može napisati kao linearna kombinacija eksponencijalnih funkcija, tj. dovoljno je posmatrati jednu komponentu rešenja. Posmatra se  $m$ -ta komponenta rešenja u vremenu i prostoru

$$h(x, t) = H_m e^{j\sigma_m x} e^{j\beta_m t}; \quad u(x, t) = U_m e^{j\sigma_m x} e^{j\beta_m t}, \quad (3)$$

U datom sistemu prva eksponencijalna funkcija opisuje raspored rešenja po prostoru, a druga raspored po vremenu. Uvrštavanjem ovih izraza u polazne jednačine se dobija homogen sistem od dve jednačine, gde je uslov postojanja netrivialnog rešenja da je determinanta sistema nula. Primenom ovog uslova i uvođenjem brzine propagacije talasa,  $c = \sqrt{gh_0}$ , određuje se veza konstanti  $\sigma_m$  i  $\beta_m$ . Tražena veza je  $\beta_m / \sigma_m = \pm c$ . Dobijena su dva rešenja, a ukupno rešenje se dobija njihovom linearnom kombinacijom,

$$h_m = e^{j\sigma_m x} (A_m e^{j\beta_m t} + B_m e^{-j\beta_m t}); \quad u_m = e^{j\sigma_m x} \left( -A_m \frac{g}{c} e^{j\beta_m t} + B_m \frac{g}{c} e^{-j\beta_m t} \right) \quad (4)$$

U nastavku se razmatra faktor amplifikacije  $|e^{-j\beta_m t}|$  odnosno  $|e^{j\beta_m t}|$ ,

$$|e^{\pm j\theta}| = \sqrt{R_e^2(e^{\pm j\theta}) + I_m^2(e^{\pm j\theta})} = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1. \quad (5)$$

Apsolutna vrednost faktora amplifikacije je jedan što znači da se proizvoljna komponenta tokom vremena ne amplifikira tj. početna vrednost putuje nizvodno brzinom  $c = \sqrt{gh_0}$  bez promene oblika i bez amplifikacije tj. rasplinjanja.

### 3. VON NEUMANN-OVA ANALIZA STABILNOSTI PRIBLIŽNOG REŠENJA LINEARIZOVANIH JEDNAČINA

Približno rešenje se dobija primenom Preissmann-ovih aproksimacija (6) na linearizovane jednačine (2).

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \theta \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x}; \quad \frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{2\Delta t} + \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{2\Delta t}; \quad (6)$$

$$f \cong \theta \frac{f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1}}{2} + (1-\theta) \frac{f_{i+1}^n + f_i^n}{2}$$

Razvijanjem približnog rešenja u Fourier-ov red se dobija sistem od dve jednačine, čije rešenje je dato sa (7), gde je  $Cr = c \cdot \Delta t / \Delta x = \sqrt{gh_0} \cdot \Delta t / \Delta x$ , Courant-ov broj.

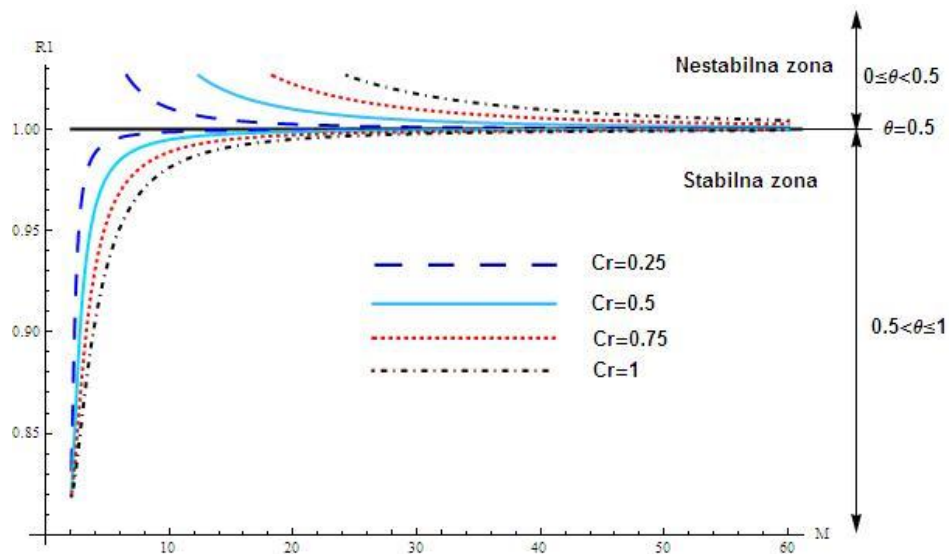
$$e^{j\beta_m \Delta t} = \frac{1 - 4\theta(1-\theta)Cr^2 \frac{\sin^2(\sigma_m \Delta x)}{[1 + \cos(\sigma_m \Delta x)]^2}}{1 + 4\theta^2 Cr^2 \frac{\sin^2(\sigma_m \Delta x)}{[1 + \cos(\sigma_m \Delta x)]^2}} \pm j \frac{2Cr \frac{\sin(\sigma_m \Delta x)}{[1 + \cos(\sigma_m \Delta x)]}}{1 + 4\theta^2 Cr^2 \frac{\sin^2(\sigma_m \Delta x)}{[1 + \cos(\sigma_m \Delta x)]^2}} \quad (7)$$

Apsolutna vrednost faktora amplifikacije je  $|e^{j\beta_m \Delta t}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Pošto se kod približnog rešenja ne zna da li je  $\beta_m$  realan ili kompleksan broj, posmatra se brzina propagacije definisana kao  $\text{Re}(\beta)/\sigma$ . Nakon niza matematičkih transformacija, brzina propagacije talasa je  $\text{Re}(\hat{\beta}_m)/\hat{\sigma}_m = \tan^{-1}(B/A)/\hat{\sigma}_m \Delta t$ . Definišu se amplitudna,  $R_1$ , i fazna,  $R_2$  greška.

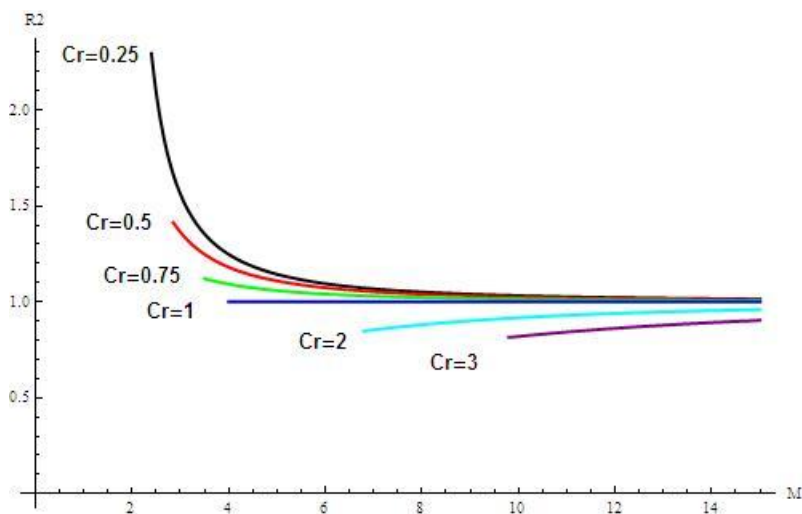
$$R_1 = \frac{\text{apsolutna vrednost faktora amplifikacije približnog rešenja}}{\text{apsolutna vrednost faktora amplifikacije tačnog rešenja}} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$R_2 = \frac{\text{brzina propagacije } m\text{-te komponente približnog rešenja}}{\text{brzina propagacije } m\text{-te komponente tačnog rešenja}} = \frac{\tan^{-1}(B/A)}{2\pi Cr / (\lambda_m / \Delta x)}$$

U nastavku se daje grafički prikaz fazne i amplitudne greške, gde je  $M = \sigma / \Delta x$ .



Slika 1 – Grafički prikaz amplitudne greške



Slika 2 – Fazna greška za  $\theta=0.5$

Upoređivanjem grešaka  $R_1$  i  $R_2$  se zaključuje da Preissmann-ova šema daje tačno rešenje linearizovanih jednačina za kombinaciju  $Cr=1$  i  $\theta=0.5$ .

#### 4. TEST DUGOTRAJNOG OČUVANJA ZAPREMINE MODELA ZA JEDNODIMENZIONALNO NEUSTALJENO TEČENJE (ASCE TEST)

Model se primenjuje na horizontalan, prizmatičan kanal dužine 10km. Poprečni presek kanala je trapezni sa osnovom 10m i nagibom strana 1 : 2. Manningov koeficijent je  $0.04 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ . Računski korak po prostoru je 1km, a računski korak po vremenu je 6min. Za početni uslov se uzima  $Q = 0$  i konstantna dubina vode od 7m. Nizvodni granični uslov je zatvoren kanal, a uzvodni granični uslov je opisan sinusoidom (8) tokom perioda od 6 časova nakon čega do kraja proračuna nema dotoka. U tabeli 1 su prikazane relativne greške zapremine za različite kombinacije  $\theta$  i  $m$ . Isti test se ponavlja za neprizmatičan kanal sa osnovom 10m na uzvodnom kraju, do 20m na nizvodnom kraju. Relativna greška zapremine je za ovaj slučaj data u tabeli 2.

Tabela 1 – Relativna greška zapremine

\* zapreminska greška manja od  $10^{-3}\%$  se zanemaruje

Koef. pond.	$\theta < 0.5$	$\theta = 0.5$		$\theta = 0.55$		$\theta = 2/3$		$\theta = 1$	
Br. Iter.	$m \geq 1$	$m = 1$	$m > 1$	$m = 1$	$m > 1$	$m = 1$	$m > 1$	$m = 1$	$m > 1$
Zapr. greška (%)	Nestabilno	0.93	0.01	0.91	0.0*	0.91	0.0*	0.9	0.0*

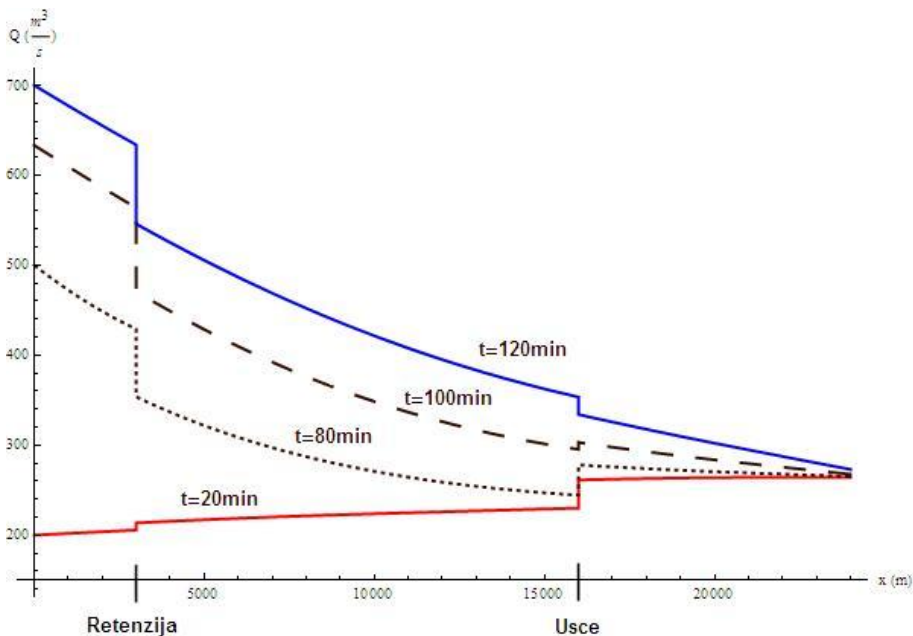
$$Q = 200 \sin\left(\frac{2\pi t}{21600}\right); \quad (t \text{ je u sekundama}) \text{ za } 0 \leq t \leq 6 \text{ h} \quad (8)$$

Tabela 2 – Relativna greška zapremine

Koef. pond.	$\theta < 0.5$	$\theta = 0.5$		$\theta = 0.55$		$\theta = 2/3$		$\theta = 1$	
Br. iteracija	$m \geq 1$	$m = 1$	$m > 1$	$m = 1$	$m > 1$	$m \geq 1$	$m = 1$	$m > 1$	$m = 1$
Zapr. greška (%)	Nestabilno	0.69	0.0*	0.67	0.0*	0.66	0.0*	0.66	0.0*

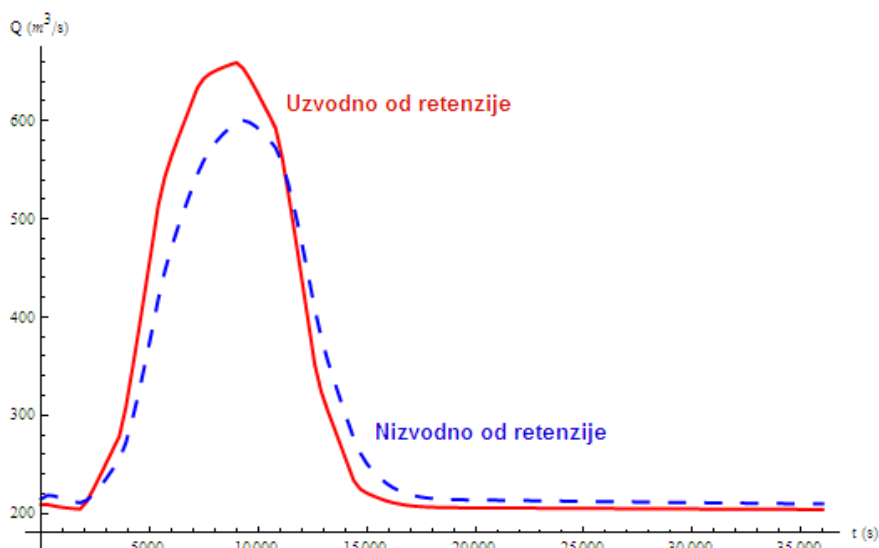
## 5. TESTIRANJE MODELA GRANATE MREŽE KANALA SA “UNUTRAŠNJIM” GRANIČNIM USLOVIMA

Razmatra se neprizmatičan kanal pravougaonog poprečnog preseka, dužine 24km i konstantnog nagiba od 0.0001. Širina kanala linearno raste od 23.6m na uzvodnom do 26m na nizvodnom kraju. Manning-ov koeficijent je  $1/15 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ . Na 3km od uzvodnog kraja se nalazi bočna retenzija konstantne površine od 10ha. U kanal se, na 16km od uzvodnog kraja, uliva pritoka sledećih karakteristika: prizmatičan kanal pravougaonog poprečnog preseka širine 20m, dužine 10km, Manning-ovim koeficijentom  $0.02 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$  i nagibom dna 0.0005. Na 2km uzvodno od ušća je prag širine 20m, sa koeficijentom preliivanja 1. Uzvodni granični uslovi su poznati hidrogrami.

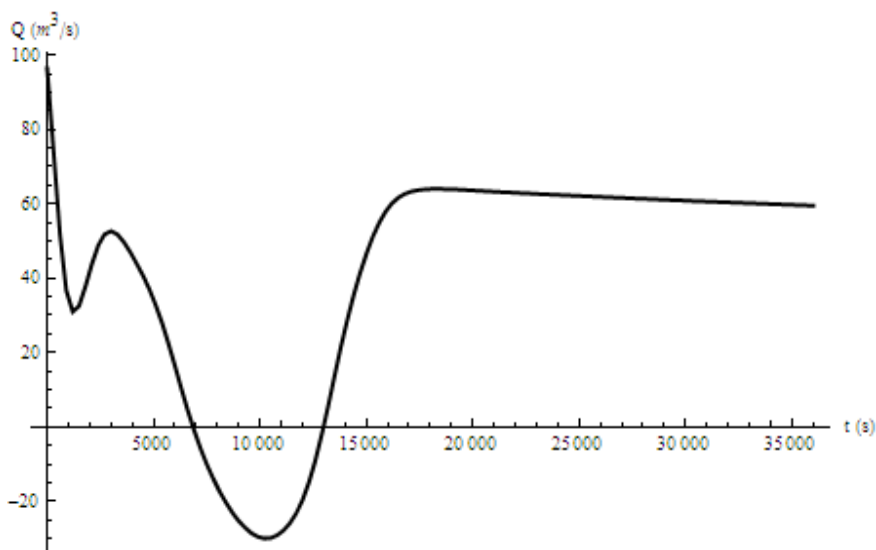


Slika 3 –  $Q(x)$  glavnog toka

U prvom slučaju je nizvodni granični uslov poznata veza  $Q(Z)$  koja važi za jednoliko tečenje  $Q = K\sqrt{S_0}$ . Na slici 3 su prikazane skokovite promene protoka na mestu ušća pritoke u glavni tok. Punjenje, odnosno pražnjenje retenzije, je prikazano na slici 4 u vidu hidrograma za presek neposredno uzvodno i nizvodno od retenzije. Rezultati proračuna pritoke su dati na slici 5 u vidu hidrograma za presek sa pragom.

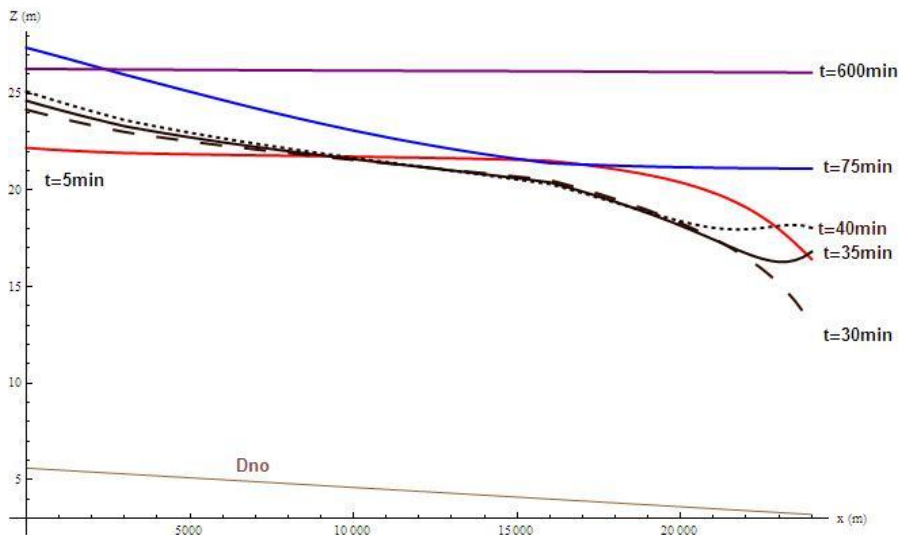


Slika 4 – Hidrogram za presek neposredno uzvodno i nizvodno od retenzije



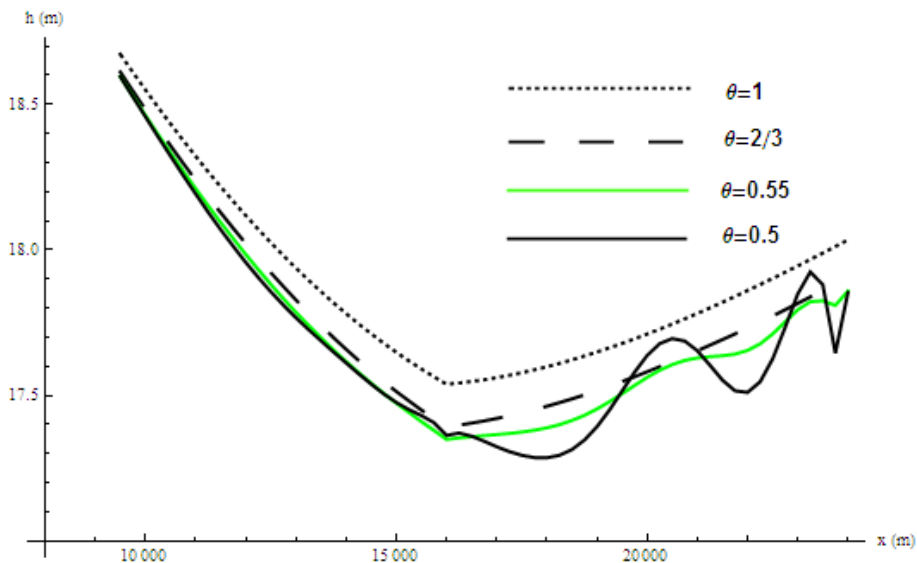
Slika 5 – Hidrogram za presek sa pragom

U drugom slučaju je nizvodni granični uslov veza  $Q(Z)$  usled isticanja ispod tablaste ustave koje je ograničeno na slučaj slobodnog isticanja za malu otvorenost ustave. Rezultati su prikazani na slici 6.



Slika 6 – Linija nivoa glavnog toka

## 6. ANALIZA REZULTATA



Slika 7 – Uticaj koeficijenta ponderacije na nelinearizovane jednačine tečenja

Na slici 7 su prikazani rezultati proračuna, za deonicu kanala u okolini ušća pritoke u glavni tok. Za sve proračune je  $Cr > 1$ , što ukazuje na postojanje fazne greške. Sa porastom koeficijenta ponderacije raste i numerička difuzija što dovodi do rasplinjavanja nastale fazne greške, kao što je i prikazano na slici 7.

## LITERATURA

- [1] J.A. Cunge, F.M. Holly, A. Verwey, *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman publishing limited, London, 1980.
- [2] M. Spasojević, *Numerička hidraulika*, Pisana predavanja, Subotica, 1996.
- [3] M. Stipić, *Ustava kao merni objekat pri slobodnom isticanju*, Seminarski rad iz predmeta Eksperimentalna hidraulika, Subotica, 1998.

## MATHEMATICAL MODELING OF 1D UNSTEADY FLOW IN OPEN CHANNELS

**Summary:** *The paper presents the development and testing of one-dimensional unsteady flow in a branched network of open channels with “internal” boundary conditions. The Von-Neumann’s stability analysis of the Preissmann’s scheme was done for the simplified flow equations. The numerical solution of de St. Venant’s equations was tested using a series of numerical experiments, including standard ASCE tests. The model of the branched channel network includes “internal” boundary conditions. “Internal” boundary conditions were checked by making sure that each condition satisfies related hydraulic laws for a series of unsteady flow situations.*

**Key words:** *One-dimensional model, unsteady flow, branched channel network, “internal” boundary conditions.*