

ДИГИТАЛНА ОБРАДА ЧЕТРДЕСЕТОГОДИШЊИХ СРЕДЊИХ ДНЕВНИХ ТЕМПЕРАТУРА У БЕОГРАДУ

Зорана Петојевић¹
Марија Петронијевић²
Милица Мирковић³
Ивана Балић⁴
Радован Госпавић⁵
Горан Тодоровић⁶

УДК: 551.501(497.11)

DOI:10.14415/konferencijaGFS 2016.017

Резиме: У раду је, на бази јавних података о средњим дневним температурама ваздуха, мерених у периоду од 40 година (1.1.1975-31.12.2014.) у граду Београду, одређен тренд пораста температуре, а затим је дата аналитичка формула временске зависности температуре. Анализом спектра је утврђено постојање карактеристичних периода понављања температурских промена које одговарају вишегодишњим, годишњим и сезонским варијацијама температуре. На бази овога је изведена хармонијска аналитичка формула која описује промене у анализираном периоду, у којој фигурише једна основна временска периода. Изведена формула може да послужи и за предвиђање будућих дугорочних температурских варијација. Резултати рада могу бити од интереса за анализу нестационарних процеса транспорта топлоте у грађевинским објектима.

Кључне речи: дигитална обрада температурских сигнала, тренд пораста температуре, мерене температуре ваздуха у Београду

1. УВОД

Математички модел нестационарног преношења топлоте кроз раван зид описано је Фуриесовом диференцијаном једначином у којој фигурише временски и просторно променљиво температурно поље [1]. Решавање ове јеначина пордразумева

¹Зорана Петојевић, дипл.инж. грађ., Универзитет у Београду, Грађевински факултет Београд, Булевар краља Александра 73, Београд, Србија, тел: 0641306101, e-mail: zjovanovic@grf.bg.ac.rs

²Марија Петронијевић, маг. инж. грађ., Универзитет у Београду, Грађевински факултет Београд, Булевар краља Александра 73, Београд, Србија, тел: 0641967644, e-mail: mpetronijevic@grf.bg.ac.rs

³Милица Мирковић, маг. инж. грађ., Универзитет у Београду, Грађевински факултет Београд, Булевар краља Александра 73, Београд, Србија, тел: 0644732829, e-mail: milicamirkovic91@gmail.com

⁴Ивана Балић, PhD Electrical Engineering, CEO & Founder, SonoView Acoustic Sensing Technologies, Bile, Swiss, тел: +41 76 463 18 92, e-mail: ivana.balic@sono-view.com

⁵Радован Госпавић, дипл.инж.ел., Универзитет у Београду, Грађевински факултет Београд, Булевар краља Александра 73, Београд, Србија, тел: 0113218584, e-mail: gospavic@grf.bg.ac.rs

⁶Горан Тодоровић, дипл.инж.ел., Универзитет у Београду, Грађевински факултет Београд, Булевар краља Александра 73, Београд, Србија, тел: 0113218584, e-mail: todor@grf.bg.ac.rs

познавање граничних услова од којих је један иницијални (временски), а друга два представљају граничне услове на спољашњој и унутрашњој површини зида. Када су у питању зграде које реално егистирају у итекако променљивим климатским условима, а пре свега променљивим температурним условима, гранични услови при решавању ових проблема представљају функције времена.

Познавањем спољашњих и унутрашњих температура на површини зида или температура ваздуха са спољашње и унутрашње стране зида, ми имамо дефинисане граничне услове. Аутори овога рада су у својим предходним радовима [2], [3], изучавали могућност предикције унутрашње температуре ваздуха у просторији на основу измерених спољашњих температура ваздуха и дефинисали су трансфер функцију која повезује ове две величине.

Имајући ово у виду, задатак дефинисања просторних граничних услова би могао да се сведе на познавање промене температуре на спољашњој страни зида или промене спољашње температуре ваздуха. Многи европски и светски градови су своју промену температуре ваздуха извели у аналитичком облику, узимајући свега један или два периода варијације температуре који осликавају обично само сезонске и годишње промене температуре ваздуха [4], [5]. Неке од европских држава су ове формуле убациле и у своје стандарде који се тичу енергетске ефикасности у зградарству, чиме је знатно унапређено пројектовање енергетски ефикасних зграда.

У овом раду је, на бази јавних података о средњим дневним температурама ваздуха у Београду, мерених у периоду од 40 година, изведена хармонијска аналитичка формула која описује промене температуре ваздуха у анализираном периоду, у којој фигурише једна основна временска периода.

За наведени период одређен је тренд пораста температуре. Изведена аналитичка формула може да послужи за предвиђање будућих дугорочних температурских варијација.

5. ИЗВОР ПОДАТАКА

У раду су коришћени јавно доступни подаци за температуру ваздуха Републичког хидрометеоролошког завода Србије [6]. Станица са које су презети температурни подаци је метеоролошка станица Опсерваторија у Београду (Слика 1а.).



Слика 1. а) Опсерваторија: Београд – Врачар, б) мерна кућица

Опсерваторија у Београду, као главна метеорошка станица, основана је 1887. године, и представља централну установу за прикупљање климатских података из целе Србије. Станица је позиционирана на надморској висини од 132мнм, а лоцирана на координатама 44°48'С и 20°28'И. Температура ваздуха се мери на отвореном простору на висини од 2м изнад земљине површине и у нарочитом метеоролошком заклону, мерна кућица, која термометре штити од падавина и зрачења (Слика 16). Мерења температуре ваздуха се извршавају живиним термометрима у складу са домаћим и међународним стандардима и упутствима за руковање и одржавање од стране произвођача. Подаци се читавају као цели и десети делови степена целзијуса. Преузети подаци за температуре ваздуха у Београду обухватају период од 40 година и то од 1. јануара 1975.год. до 31. децембра 2014.год. За сваки дан у наведеном периоду су преузете температуре ваздуха за три термина: 07, 14 и 21 сат по локалном времену. На основу ових температура добијене су средње дневне температуре ваздуха у Београду за наведени период од 40 година. Формула по којој су рачунате средње дневне температуре ваздуха T_{sr_i} је [6]:

$$T_{sr_i} = \frac{T_{7i} + T_{14i} + 2 \cdot T_{21i}}{4} \quad (1)$$

где су T_{7i} , T_{14i} и T_{21i} мерене температуре ваздуха у 7, 14 и 21 сат по локалном времену у току дана i . Укупан број података који су анализирани износи 14610.

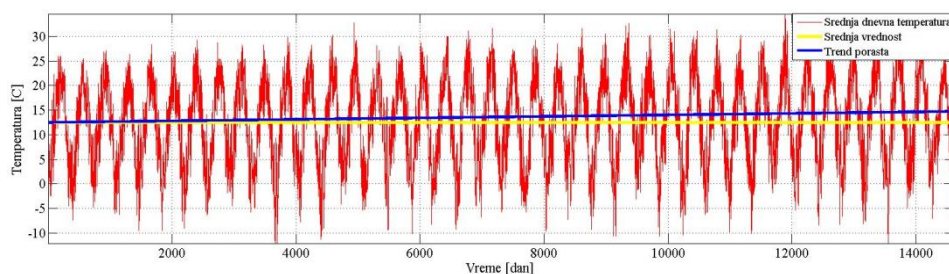
6. ДИГИТАЛНА ОБРАДА ПОДАТАКА

Прикупљени подаци о температурама, чине низ од 14610 дискретних података који представља улазни сигнал. Применом различитих метода дигиталне обраде сигнала добијено је више математичких модела за улазни сугнал. Спектралном анализом је утврђено постојање карактеристичних периода понављања температурских промена које одговарају вишегодишњим, годишњим, сезонским и недељним варијацијама температуре. Добијени математички модели, представљају хармонијске моделе тј. излазне сигнале, у којима су елиминисане најбрже промене температуре које се дешавају у периодима од неколико дана до неколико недеља. Хармонијски модели добијени су применом конкретно следећих метода:

- *МОДЕЛ 1* – применом дискретне Фуријеове трансформације (ДФТ)
- *МОДЕЛ 2* – применом LOESS методе усредњавања где су избачене брзе промене које се односе на температурне веријације које се дешавају у периоду од неколико дана до неколико недеља, а онда је примењена ДФТ
- *МОДЕЛ 3* – применом дискретне косинусне трансформације (ДКТ)
- *МОДЕЛ 4* - исто као МОДЕЛ 2, стим што је на LOESSов модел температура примењена ДКТ уместо ДФТ.

Сви добијени хармонијски модели су упоређени са улазним сигналом. Усклађеност улазног сигнала са добијеним хармонијским моделима представљена је преко средњег квадратног одступања, интезитета корелације између два сигнала и процентуалне усклађености два сигнала. Комплетна дигитална обрада сигнала је рађена у MATLAB коду.

На Слици 1. представљен је улазни сигнал, који представља измерене четрдесетогодишње средње дневне температуре за Београд (црвена линија), средња вредност сигнала (жута линија) и линеарни тренд пораста температура (плава линија). У табели 1. дате су нумеричке вредности за наведене статистичке величине за период од 40 и 10 година.



Слика 2. Средње дневне температуре у Београду, тренд пораста и средња температура

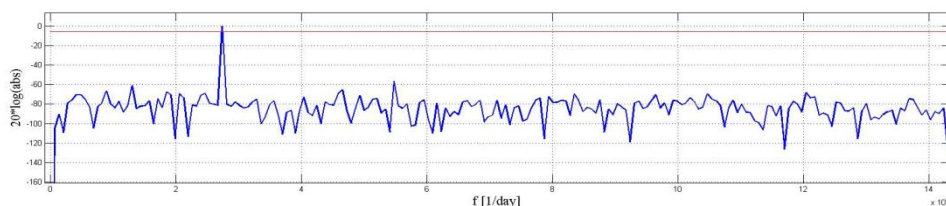
Табела 1. Статистичка анализа температурних података

Период	1975-2014	2004-2014
Средња вредност [°C]	12.4957	13.3025
Тренд пораста [°C/год]	0.0553	0.1178

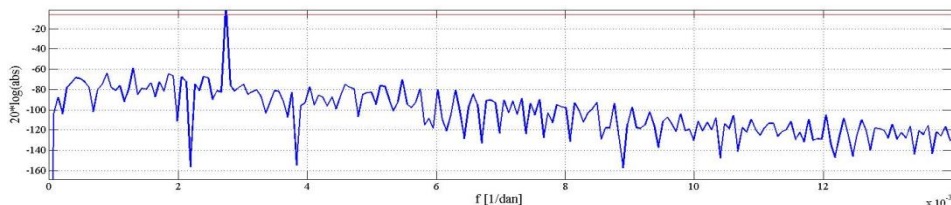
На основу податак у Табели 1. линеарни тренд пораста температура, (плава линија на Слици 2.) има облик:

$$T_{trend} = 12,4957 + 0,000152t \quad (2)$$

Занимљиво је истаћи да је анализа сигнала показала да се тренд пораста средњих температура за период од последњих 10 година удвостручио у односу на тренд за протеклих 40 година. Применом дискретне Фуријеве трансформације на измерене температуре и LOESSов модел температура добијени су фреквенцијски спектри за ова два сигнала. Ови фреквенцијски спектри су приказани на Сликама 3. и 4. Одговарајући параметри Фуријеве трансформације: Фуријеови коефицијенти, амплитуде хармоника, одговарајуће фреквенције и периоди дати су у Табелама 2. и 3. Хармоници су сортирани у опадајући низ по вредности амплитуде.



Слика 3. ДТФ хармонијска анализа података измерене температуре



Слика 4. ДТФ хармонијска анализа података LOESSов модел

Табела 2. Хармонијска анализа - измерене температуре, нумеричке вредности

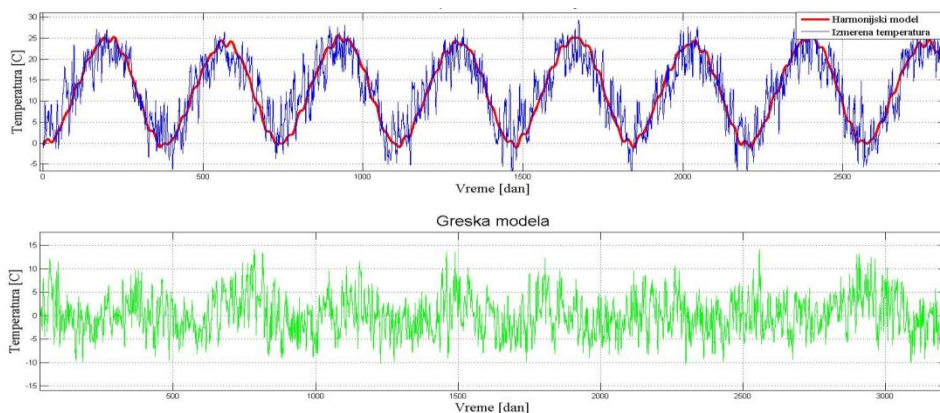
n	ДТФ коефицијенти $1.0e+003 *$	Амплитуда A_n $1.0e+003*$	Фреквенција ω_n [1/дан]	Период T_n [дан]
41	-76.626+19.469i	79.061	2.738E-03	365.23
81	-4.367+-1.64i	4.665	5.478E-03	182.55
20	1.978+-3.234i	3.791	1.299E-03	769.82
356	-2.347+-2.187i	3.209	0.024315	41.13
483	-1.72+-2.551i	3.077	0.033015	30.29
69	-0.957+-2.872i	3.028	4.656E-03	214.78
493	1.934+-2.316i	3.018	3.370E-02	29.67
296	-2.487+-1.613i	2.964	0.020205	49.49
372	-1.822+2.238i	2.886	2.5411E-02	39.35

Табела 3. Хармонијска анализа - LOESSов модел, нумеричке вредности

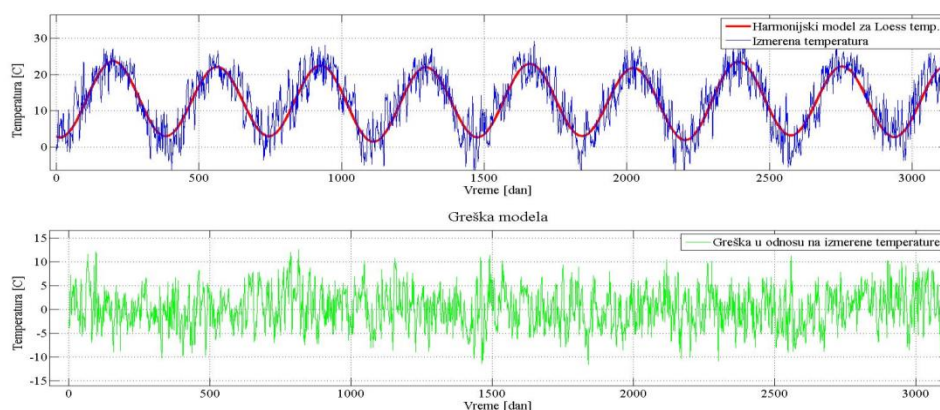
n	ДТФ коефицијенти $1.0e+003 *$	Амплитуда A_n $1.0e+003*$	Фреквенција ω_n [1/дан]	Период T_n [дан]
1	182.816+0i	182.816	-2.000E-06	500,000.00
41	-69.761+17.935i	72.03	0.002738	365.23
2	0.288+5.339i	5.347	6.600E-05	15,151.52
20	1.965+-2.966i	3.558	1.299E-03	769.82
3	0.532+3.256i	3.299	1.350E-04	7,407.41
28	-2.793+-0.234i	2.803	1.847E-03	541.42
14	-2.504+-1.188i	2.772	8.880E-04	1,126.13
7	2.333+1.19i	2.619	4.090E-04	2,444.99
5	-1.1+2.237i	2.492	2.720E-04	3,676.47

Хармоници са највећом енергијом на ДТФ спектру за сигнал измерених температура су на фреквенцијама које одговарају периодима од 365.23 дана, 182.55, 41.13, 30.29 као и периоду од 769.82 дана. Уочени доминантни периоди одговарају променама температуре на нивоу једне године, шест месеци, на нивоу половине једног годишњег доба тј. 1.5 месеци, месец дана као и на двогодишњем нивоу. На ДТФ спектар за LOESSов модел температура не могу се уочити хармоници на високим фреквенцијама чији су периоди мањи од годину дана.

Применом инверзне ДТФ само на хармонике са високом енергијом у спектру измерених температура односно у спектру за LOESSов модел температура добијени су хармониски *МОДЕЛ 1* и *МОДЕЛ 2*. Добијени модели - плава линија на графицима, измерене температуре - црвена линија и грешка модела - зелена линија приказани су на Сликама 4. и 5.



Слика 4. ДФТ хармонијски модел средњих дневни температура и грешка модела



Слика 5. ДФТ хармонијски модел LOESS температура и грешка модела

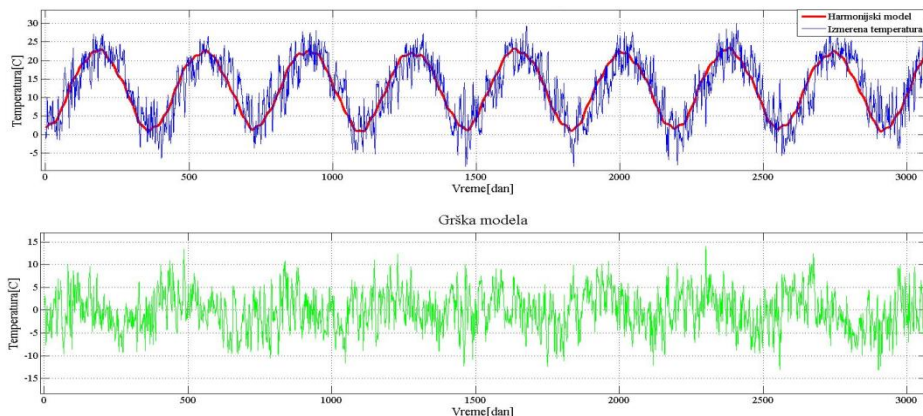
Средње квадратно одступање модела у односу на улазне температуре као и интезитет корелације два сигнала и процентуална усклађеност дати су у Табели 4. за оба модела.

Табела 4. Оцена МОДЕЛА 1 и МОДЕЛА 2

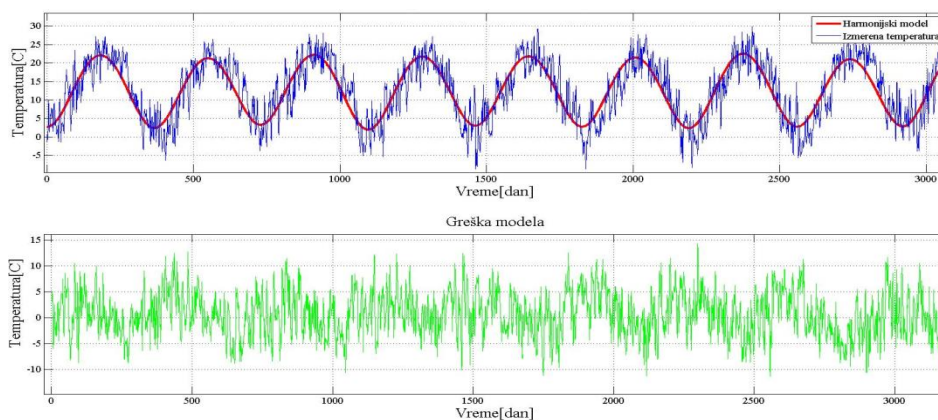
МОДЕЛ	Средње квадратно одступање - MSE	Корелација са улазним сигналом	Усаглашеност модела - GoodnessOfFit [%]
ДФТ модел из измерених температура	18.0942	0.8780	72%
ДФТ модел на основу LOESS модела	18.7081	0.8766	68%

МОДЕЛ 3 и МОДЕЛ 4 добијени су применом инверзне дискретне косинусне трансформације на хармонике са високом енергијом који су уочени у косинусном спектру сигнала за измерене температуре и косинусном спектру за LOESSов модел температура. За МОДЕЛ 3 издојене су фреквенције које одговарају периодима од 365.23, 182.55, 95.12, 35.87 и 789.58 дана, а за МОДЕЛ 4 хармоници са високом енергијом су се налазили на нижим фреквенцијама, тј. дужим периодима: 789.58, 365.23, 182.55 и 121.68 дана.

На Сликама 6. и 7. приказани су хармонијски *МОДЕЛ 3* и *МОДЕЛ 4* и грешке модела. У Табели 5. дата је оцена модела.



Слика 6. а) ДКТ хармонијски модел средњих дневни температура и грешка модела



Слика 7. ДКТ хармонијски модел LOESS температура и грешка модела

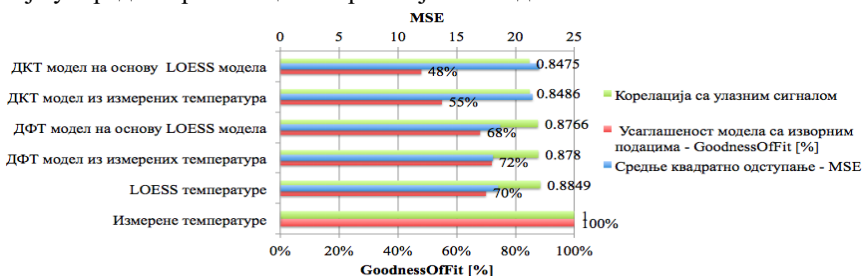
Табела 5. Оцена *МОДЕЛА 3* и *МОДЕЛА 4*

МОДЕЛ	Средње квадратно одступање - MSE	Корелација са улазним сигналом	Усаглашеност модела - GoodnessOfFit [%]
ДКТ модел из измерених температура	21.4621	0.8486	55%
ДКТ модел на основу LOESS модела	22.0402	0.8475	48%

7. ХАРМОНИСКА АНАЛИТИЧКА ФОРМУЛА СРЕДЊИХ ДНЕВНИХ ТЕМПЕРАТУРА У БЕОГРАДУ

На основу анализе средњих квадратних одступања, корелације између улазног и излазног сигнала и процентуалне усклађености, одабран је модел за који је

изведена аналитичка формула средњих дневних температура за Београд. На Слици 8. дат је упоредни приказ оцена хармонијских модела.



Слика 8. Оцена хармонијских модела

Најбоље оцењен модел је *МОДЕЛ 1*, добијен применом ДФТ на измерене температуре. Имајући у виду примену ДФТ, овај модел се може лако представити у комплексном облику. Собзиром да температура није комплексна величина неприхватљиво је представљати је у комплексном облику. Шта више, комплексан облик било које физичке величине је неприхватљив за праксу у грађевинарству.

Да би дошли до аналитичке формуле за промену температуре у реалном времену потребно је спектар добијен ДФТом приказати преко спектра континуалног температурског сигнала из кога је могуће, на основу доминантних фреквенција у спектру, дати формулу у виду тригонометријског реда у којем фигуришу поменуте фреквенције. Веза између спектра дискретне $F_D(jn\Omega)$ и континуалне $F(j\omega)$ Фуријеве трансформације је [7]:

$$T(j\omega) = T \cdot \sum_{k=0}^{N-1} T(k t_0) e^{-jn\Omega k t_0} \quad (3)$$

где је $T = t_0$, $t_0 = 1$ дан.

Применом инверзне Фуријеве трансформације на формулу (3) и приказом реалне функције температуре преко Фуријевог реда:

$$T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \quad (4)$$

где сума иде по доминантним фреквенцијама спектра, можемо добити апроксимативну формулу чију ваљаност можемо поуздано да оценимо упоређивањем са оригиналним сигналом.

Апроксимативно $T(t)$ са коначним бројем доминантних хармоника је:

$$T(t) \cong \sum_{k=1}^M a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \quad (5)$$

где коефицијенти a_k и b_k предствљају реални и имагинарни део Фуријевих коефицијената за дискретни спектар и израчунавају се по следећим формулама:

$$a_k = 2 \cdot \text{Re}\{T \cdot F_D(jn\Omega)\} \quad b_k = -2 \cdot \text{Im}\{T \cdot F_D(jn\Omega)\} \quad (6)$$

Узимајући хармонике из *МОДЕЛА 1* тј. $k = 20, 41, 81, 356$ и 483 и њима одговарајуће Фуријеве коефицијенте, за коефицијенте a_k и b_k добијамо следеће вредности:

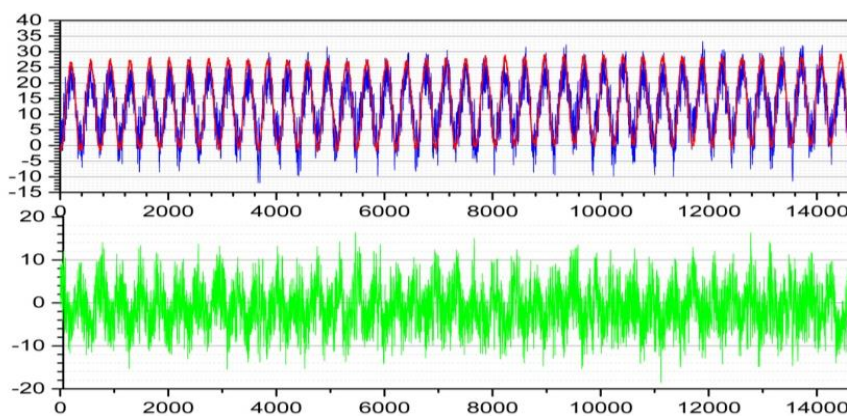
Табела 8. Вредност коефицијената a_k и b_k

k	20	41	81	356	483
a_k	- 153,252.44	- 8,734.90	3,955.55	- 4,694.96	- 3,439.71
b_k	- 38,937.68	3,280.18	6,467.62	4,374.79	5,102.31

Коначна аналитичка хармонијска формула за промену температуре за Београд за период од 40 година гласи:

$$T(t) = 12,4957 + 0,000152 \cdot t + \frac{4}{\pi N} \left[a_{20} \cos\left(\frac{40\pi t}{N/2}\right) + b_{20} \sin\left(\frac{40\pi t}{N/2}\right) + a_{41} \cos\left(\frac{82\pi t}{N/2}\right) + b_{41} \sin\left(\frac{82\pi t}{N/2}\right) + a_{81} \cos\left(\frac{162\pi t}{N/2}\right) + b_{81} \sin\left(\frac{162\pi t}{N/2}\right) + a_{356} \cos\left(\frac{712\pi t}{N/2}\right) + b_{356} \sin\left(\frac{712\pi t}{N/2}\right) + a_{483} \cos\left(\frac{966\pi t}{N/2}\right) + b_{483} \sin\left(\frac{966\pi t}{N/2}\right) \right] \quad (7)$$

где линеарни део формуле представља линеарни тренд пораста темперауре који је издвојен из улазног сигнала (2). На Слици 9. је извршено поређење улазног сигнала, тј. измерених температура и аналитички датог формулом (7) сигнала.



Слика 9. Измерене температуре, аналитички модел и грешка модела

Средње одступање модела за читав период од 40 година је $+1^\circ\text{C}$. Формула (7) је базирана на основној фреквенцији која одговара периоду од годину дана. Све остале фреквенције представљају целобројни умножак основне фреквенције. Ово значи да се цео модел може конципирати само на доминантној фреквенцији спектра сигнала.

8. ЗАКЉУЧАК

У раду је изведена аналитичка формула промене температуре базирана на спектру температурског сигнала у којем фигурише само једна основна фреквенција. Аналитичка формула промене температуре добијана је превођењем дискретне у континулану Фуријеву трансформацију и развијањем у тригонометријски ред.

Добијана реална функција температуре поуздано описује експерименталне резултате и лако је применљива у инжењерској пракси. Овако добијена аналитичка формула функције температуре може да послужи и за предвиђање будућих дугорочних температурских варијација. Резултати овог рада могу бити од интереса за анализу нестационарних процеса транспорта топлоте у грађевинским објектима. Модели добијени применом ДФТ дају високу прецизност апроксимације, али су због свог комплексног облика мање прихватљиви у инжењерској пракси и њихова примена препоручује се у оквиру научних истражиња.

ЛИТЕРАТУРА

- [10] Carslaw, H., Jaeger, J., "Conduction of heat in solids", Clarendon press, **1946**.
- [11] Petojević, Z., Mirković, M., Jovanović, Ž., Gospavić, R., Todorović, G., "Determination of a temperature transfer function of building constructions based on measurement data", *XVII International YUCOMAT conference*, H. Novi, Montenegro, **2015.**, Book conference pp.16
- [12] Petojević, Z., Mirković, M., Balić, I., Gospavić, R., Todorović, G., "Estimation of the Temperature Transfer Function of a Building Wall Based on Measurement Data", *Civil Engineering - Science and Practice 6th International Conference*, Zabljak, Montenegro, **2016.**, 1000-1008
- [13] Hens, H.: *Building Physics Heat, Ait and Moisture*, Ernst & Soho, Berlin, 2nd edition **2012**, 32-35
- [14] ASHRAE, *Handbook of Fundamentals*, American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineering, Inc., Atlanta, USA, **2009**
- [15] http://www.hidmet.gov.rs/ciril/meteorologija/klimatologija_godisnjaci.php, преузето 01.07.2015.
- [16] Дукић, М.: *Принципи телекомуникације*, Академска мисао, Београд, **2008**, 60-65

DIGITAL SIGNAL PROCESSING OF THE FORTY-YEAR MEAN DAILY TEMPERATURE AT BELGRADE

Summary: *In this paper, based on publicly available data of daily mean air temperature in the last 40 years (1.1.1975-31.12.2014.) in the city of Belgrade, a trend in the temperature increase and an analytic formula for temperature variation as a function of time, were determined. Spectral analysis and frequency mapping identified the existence of dominant frequencies, which correspond to perennial, annual, as well as the seasonal temperature variations. Based upon this information, an analytic formula for temperature variation for the 40 years period was derived that could be used for long-run prediction of temperature variations. The results of this research could be used in modeling of unsteady-state heat transfer problems in building physics.*

Keywords: *digital processing of temperature signals, temperature trend, measured temperature in Belgrade*