

ПРИКАЗ МЕТОДА ЗА ПРОРАЧУН ПЛОЧА ДИРЕКТНО ОСЛОЂЕНИХ НА СТУБОВЕ

Никола Мирковић¹

Иван Милићевић²

Драгослав Шумарац³

УДК: 624.073.13

DOI:10.14415/konferencijaGFS 2016.004

Резиме: У раду су анализирани резултати прорачуна армиранобетонских плоча директно ослођених на стубове, користећи различите методе које се заснивају на теорији еластичности и теорији пластичности. Разматране су три методе: метода еквивалентних трака, метода према Hillerborg-у и Wiesinger-у и метода линија лома. Метода еквивалентних трака заснива се на теорији еластичности и једна је од најчешће примењиваних метода за прорачун плоча директно ослођених на стубове, коју препоручују многи прописи за прорачун армиранобетонских конструкција. У раду су представљене и две методе које се заснивају на теорији пластичности, метода према Hillerborg-у и Wiesinger-у – теорија доње границе и метода линија лома (Yield Line theory) – теорија горње границе, која користи решења Johansen-а. Решења добијена овим методама дефинишу границе интервала критичног оптерећења. Приказане су основне теоријске претпоставке свих наведених метода као и њихова примена на плоче директно ослођене на стубове. Спроведен је прорачун плоче према Еврокоду 2 са правилним распоредом стубова, анализирани су резултати и коментарисане разлике које се јављају као последица усвајања различитих претпоставки.

Кључне речи: плоче директно ослођене на стубове, теорија еластичности, теорија пластичности, метода еквивалентних трака, метода према Hillerborg-у и Wiesinger-у, метода линија лома.

1. УВОД

Тема рада се односи на прорачун армиранобетонских плоча директно ослођених на стубове по теорији еластичности и теорији пластичности. Решење се може постићи применом једне од следећих метода: метода еквивалентних трака, метода према Hillerborg-у и Wiesinger-у и метода линија лома (Yield Line theory). Прва метода представља еластично решење проблема плоча директно ослођених на

¹ Никола Мирковић, дипл. инж. грађ., студент докторских студија, Универзитет у Београду, Грађевински факултет Београд, e-mail: nick5308.mir@gmail.com

² Иван Милићевић, дипл. инж. грађ., студент докторских студија, Универзитет у Београду, Грађевински факултет Београд, e-mail: ivanmilicevic14@yahoo.com

³ Проф. др Драгослав Шумарац, дипл. инж. грађ., редовни професор, Универзитет у Београду, Грађевински факултет Београд, e-mail: dragosumi@gmail.com

стубове и једна је од најчешће примењиваних метода, док преостале две методе дефинишу границе интервала критичног оптерећења по теорији пластичности и такође налазе своју примену у инжењерској пракси. Метода према Hillerborg-у и Wiesinger-у дефинише доњу границу критичног оптерећења (lower-bound), а метода линија лома горњу границу критичног оптерећења (upper-bound).

2. МЕТОДА ЕКВИВАЛЕНТНИХ ТРАКА

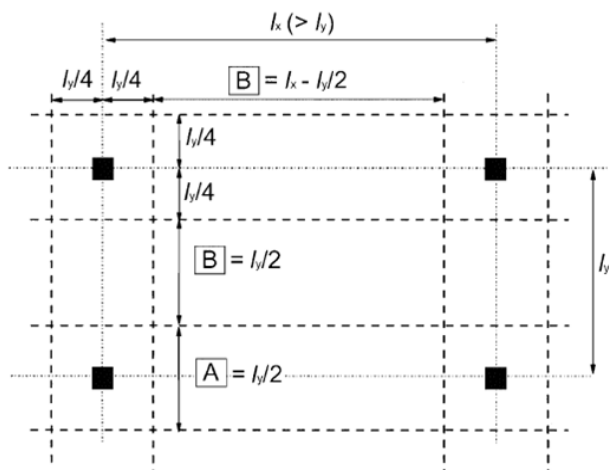
Одређивање напонско деформацијског стања плоча директно ослоњених на стубове, које се заснива на решењима у затвореном аналитичком облику је врло компликовано и због усвајања грубих апроксимативних услова на контури, често је и недовољно тачно. Тако је још давно, Lewe дао решење за средње поље претпостављајући да се равномерно расподељено оптерећење са плоче преноси равномерно на ослонце и тиме добио превелике позитивне, а премале негативне моменте у плочи. У последње време, развојем компјутерских софтвера, врло успешно се користе нумерички поступци засновани на примени методе коначних елемената, чиме се овакви проблеми решавају са довољним степеном тачности.

Међутим, у инжењерској пракси, метода еквивалентних трака представља једну од најчешће примењиваних метода за прорачун плоча директно ослоњених на стубове и оптерећених једнако подељеним оптерећењем. Применом ове методе на релативно лак и брз начин могуће је добити резултате задовољавајуће тачности у оквирима теорије еластичности, без употребе савремених компјутерских софтвера и методе коначних елемената. Да би се метода еквивалентних трака могла применити за прорачун плоча директно ослоњених на стубове, конструкција мора да задовољи следеће услове:

1. Плоча може бити оптерећена само гравитационим једнако подељеним оптерећењем по целој површини плоче.
2. Хоризонталне силе (услед дејства сеизмике, ветра и сл.) у равни плоче примају се посебним вертикалним елементима велике крутости на савијање – зидним платнима и језгрима.

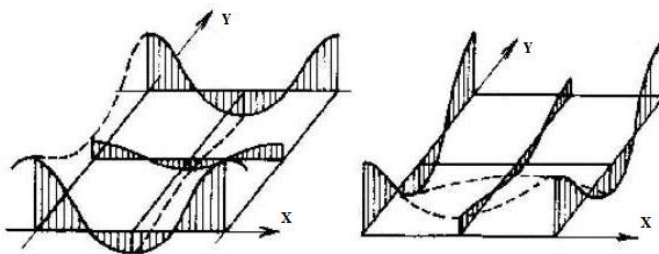
Суштина методе се састоји у томе да се плоча растави на два система носача који стоје управно један на други. Ширина трака једнака је осовинском растојању стубова из одговарајућег координатног правца (l_x или l_y). Системи се прорачунавају увек са укупним одговарајућим оптерећењем за оба ортогонална правца по правилима статике линијских носача. [1]

Према правилима за прорачун плоча директно ослоњених на стубове применом методе еквивалентних трака које прописује Еврокод 2, са слике 1 се види да ширина траке над ослонцима износи $0,5l_x$ ($0,5l_y$), док је ширина траке у пољу такође $0,5l_x$ ($0,5l_y$).



Слика 1 Положај и ширина траке над ослонцима (А) и у пољу плоче (В) директно ослоњене на стубове према Еврокоду 2

Када је у питању прерасподела момената савијања по тракама, највећи негативни моменти се налазе у траци над ослонцима 60% - 80%, док су код траке у пољу они мањи и износе 40% - 20% укупног момента. Иста аналогија важи и за позитивне моменте, они су такође већи у траци над ослонцима 50% - 70%, за разлику од траке у пољу где та вредност износи 50% - 30% укупног момента. Прерасподела момента савијања за методу еквивалентних трака према Еврокоду 2 приказана је у табели 1 овог текста, док су на слици 2 приказани дијаграми момената савијања.



Слика 2 Дијаграми момената савијања за x и y правац неког средњег поља плоче

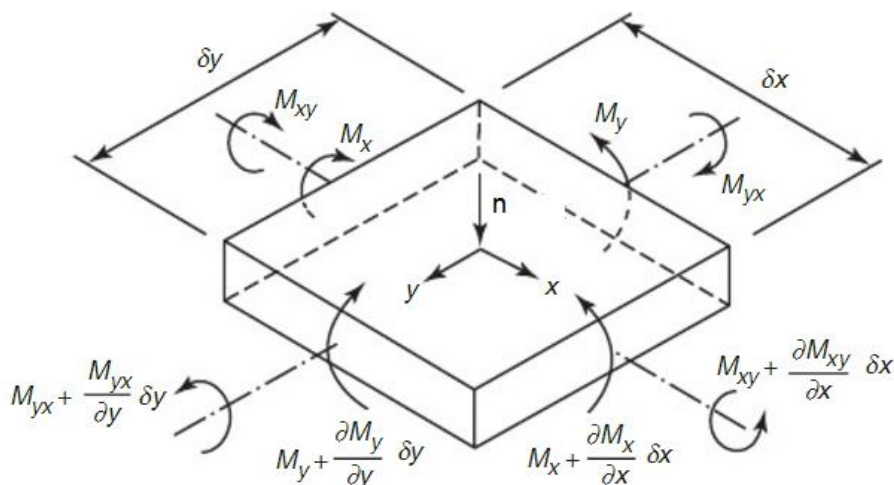
Табела 1 Прерасподела позитивних и негативних момената савијања по тракама према Еврокоду 2

	Негативни моменти	Позитивни моменти
Трака над ослонцима	60% - 80%	50% - 70%
Трака у пољу	40% - 20%	50% - 30%
Напомена: Укупан збир негативних, односно позитивних момената за траку над ослонцима и у пољу мора износити 100%.		

3. МЕТОДА ПРЕМА HILLERBORG-У И WIESINGER-У

Класичном еластичном анализом плоче према Timoshenko и Krieger може се приказати основна диференцијална једначина плоче изведена из услова равнотеже на диференцијално малом делу плоче, приказаном на слици 3:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} = -n \quad (1)$$



Слика 3 Пресечне силе на диференцијално малом елементу плоче

Еластична анализа је у овом случају оправдана јер је то доња граница решења према Hilleborg-у и Wiesinger-у при коме су услови равнотеже задовољени, а достигнути моменти су мањи од граничних момената савијања. Даље поједностављење проблема врши се под претпоставком да су торзиони моменти једнаки нули при гравитационом оптерећењу, чиме се диференцијална једначина своди на две независне једначине:

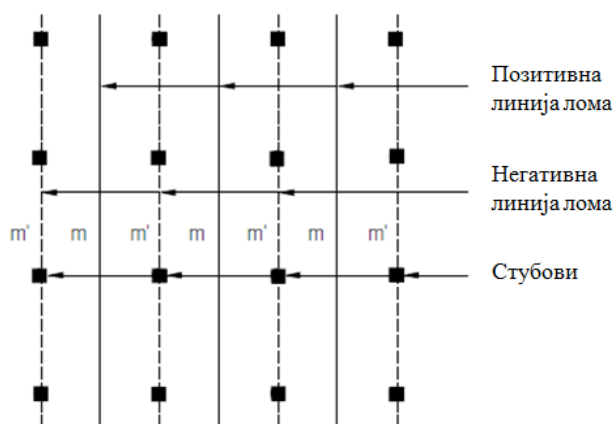
$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = -\alpha n \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -(1 - \alpha)n \quad (3)$$

На овај начин се проблем плоче може посматрати преко два независна линеарна статичка система која се решавају за оба ортогонална правца при пуном оптерећењу плоче. Број прорачунских трака не треба да буде велики, јер то може изазвати проблеме при армирању плоче због превише детаља, док ће премали број трака ипак дати неефикасно решење. Hilleborg-ов метод не намеће компатибилност деформација између појединачних трака, а детаљна прерасподела момената савијања према овој методи дата је у нумеричком примеру овог рада. [2]

4. МЕТОДА ЛИНИЈА ЛОМА

Метода линија лоба представља поступак за прорачун плоча директно ослоњених на стубове по теорији пластичности и дефинише горњу границу интервала критичног оптерећења. У случају методе линија лоба, која предвиђа оптерећење потребно за активирање претходно усвојеног механизма лоба, решења се могу добити користећи метод виртуелног рада или равнотежни метод. За плочу директно ослоњену на стубове и оптерећену са константним једнако подељеним оптерећењем λq на слици 4 је приказан поступак пластификације плоче у доњој и горњој зони. При томе, усваја се идеално еласопластичан материјал. Постепеним повећавањем оптерећења ($\lambda > 0$) до одређење границе плоча се понаша потпуно еластично. Уколико се оптерећење λ повећа до границу течења $\lambda = \lambda_e$ у плочи се јављају прве пластичне деформације и формирају линије лоба.



Слика 4 Формирање линија лоба код плоча директно ослоњених на стубове

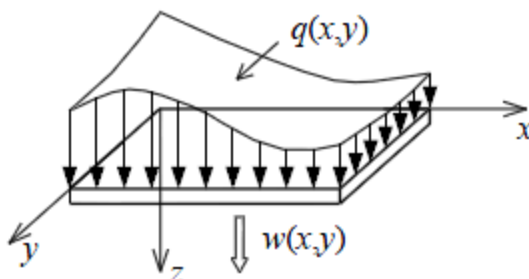
Повећавање оптерећења ствара више тачака у којима се достиже граница пластичности након чега се образују линије или зоне лоба. На крају се добија механизам лоба са максималним фактором оптерећења λ_p . Граница течења зависи само од момента савијања. Пластична ротација (у појединим тачкама око линије лоба) се може појавити само ако је одговарајући момент савијања једнак пластичном моменту, означен као и момент течења (yield moment) или гранични момент (ultimate moment). Битна карактеристика ове теорије је да је механизам лоба изабран само на основу линије лоба док се зоне лоба не разматрају. Ако је потребно увести и зоне лоба у прорачун онда се оне могу апроксимирати са гушћом мрежом линија лоба. Након што се изабере одговарајући механизам лоба дефинише се једначина:

$$W = E_d \quad (4)$$

где је W рад спољашњих сила и E_d рад унутрашњих сила остварен на померању за време лоба. Слика 5 приказује усвојени координатни систем и позитиван правац за

померање и произвољно континуално оптерећење. Рад спољашњих сила на померању $w(x,y)$ се може изразити као:

$$W = \lambda \iint_A q(x,y)w(x,y)dx dy \quad (5)$$



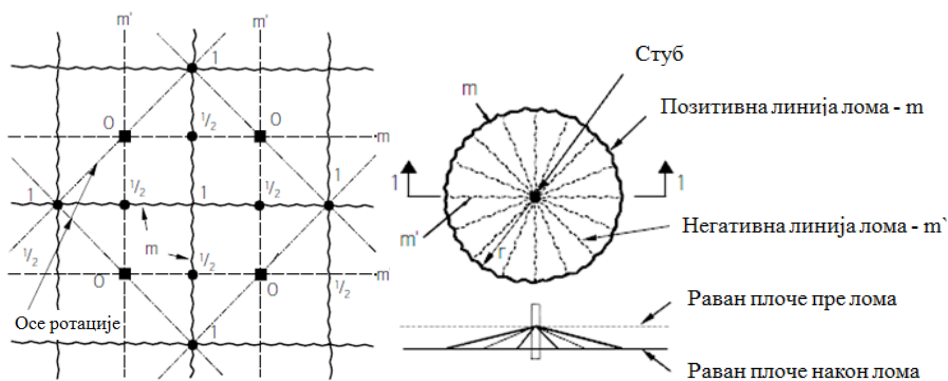
Слика 5 Произвољно површинско оптерећење по елементу плоче

Што се тиче унутрашњих сила, оне врше рад само дуж линија лома. Усваја се да само момент савијања врши рад дуж линије лома:

$$E_d = \sum m / \Delta \varphi_d / l_s \quad (6)$$

где је m пластични момент, $\Delta \varphi_d$ угао нагиба између делова плоче и l_s дужина линије лома.

Поред механизма лома приказаног на слици 4, који је најчешће и меродаван за прорачун пластичног момента савијања m , могуће су и следеће критичне конфигурације система приказане на слици 6. [3]



Слика 6 Комбиновани и локални механизми лома код плоча директно ослоњених на стубове

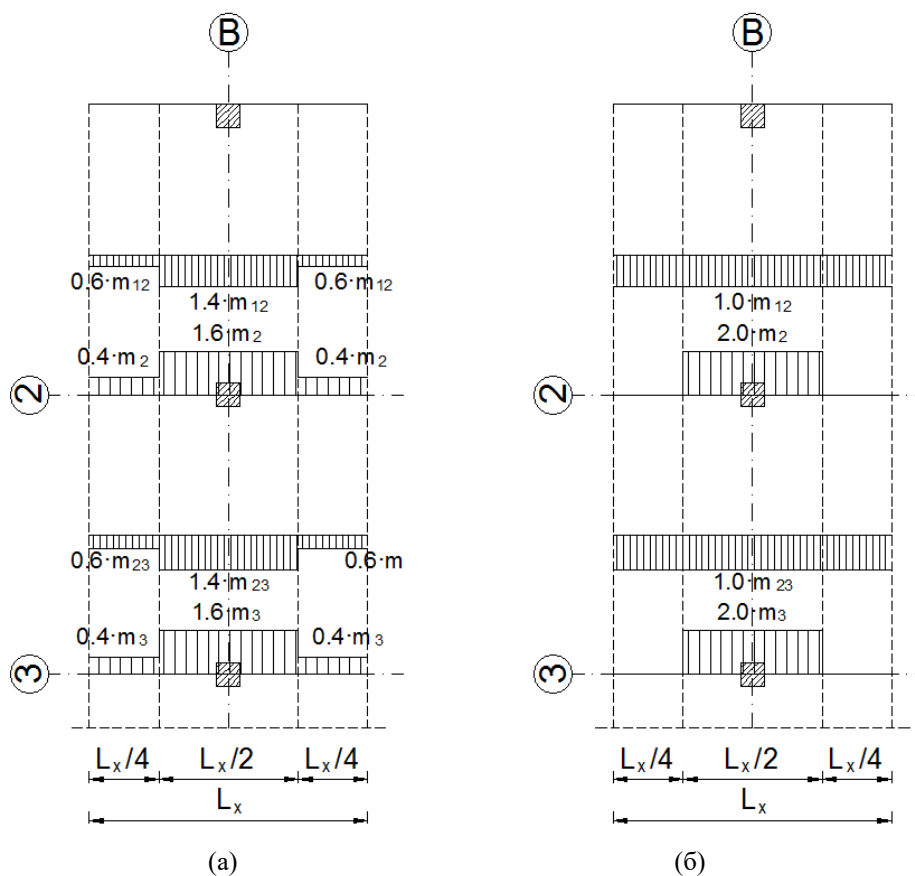
У табели 2 су приказане опште формуле за срачунавање момента пластичности m за различите случајеве граничних услова плоче:

Табела 2 Формуле за срачунавање момента пластичности m код плоча директно ослоњених на стубове

Случај	Дијаграм	Формула
1		$m = \frac{nl^2}{2(\sqrt{1+i_1} + \sqrt{1+i_2})^2}$
2		$m = \frac{nl^2}{2(1 + \sqrt{1+i_2})^2}$
3		$m = \frac{nl^2 - 4\left(m'_1 + m'_2 - \frac{(m'_1 - m'_2)^2}{nl^2}\right)}{\beta}$
4		$m = \frac{nl^2 - 4\left(m'_2 - \frac{(m'_2)^2}{nl^2}\right)}{\beta}$

5. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕР

За армиранобетонску плочу дебљине $d_p=25$ cm директно ослоњену на стубове (правилан распоред стубова), број поља у X правцу је 3, а у Y правцу 4. Поља су истих распона у оба ортогонална правца ($L_x=L_y$) и за потребе анализе резултата варирају од 5,00 - 10,00 m са кораком од 1,00 m. Гранично оптерећење које делује на плочу износи $n=10$ kN/m². Бетон је марке С37, а заштитни слој бетона $a_0=2$ cm. Стубови су квадратног облика страница 40x40 cm. Извршена је детаљна анализа и упоредни приказ резултата примењујући горе наведене методе за прорачун плоча директно ослоњених на стубове по теорији еластичности и теорији пластичности и усвојене су следеће прерасподеле момената савијања, приказане на слици 7.

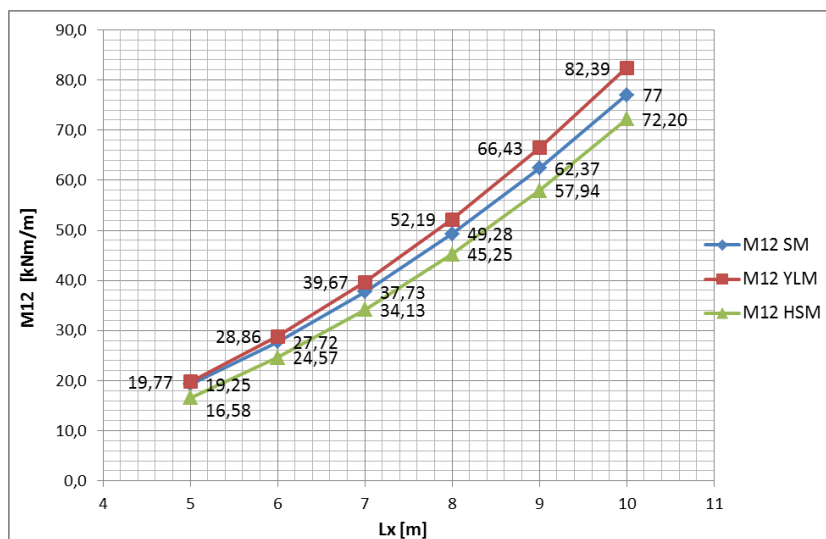


Слика 7 Упоредни приказ прерасподеле момената савијања у тракама према изложеним методама за прорачун плоча

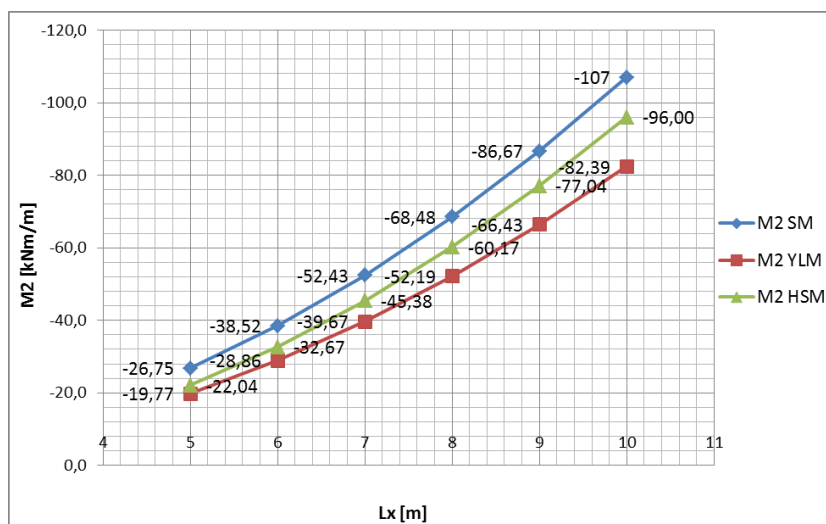
На слици 7(a) приказана је прерасподела момената савијања према методи еквивалентних трака и методи према Hillerborg-у и Wiesinger-у, која је заправо иста за обе методе, једина разлика је у вредностима срачунатих момената савијања. Однос позитивних момената (m_{12}, m_{23}) за траку над ослоњцима и траку у пољу је 1,4/0,6, док је тај однос за негативне моменте (m_2, m_3) 1,6/0,4.

На слици 7(б) приказана је прерасподела момената за методу линија лома где се за негативне моменте (m_2, m_3) она и не врши већ се целокупни момент налази у траци изнад ослонаца $2,0m_2$ ($2,0m_3$), док се позитивни моменти равномерно расподељују у траку над ослоњцима и траку у пољу $1,0m_{12}$ ($1,0m_{23}$).

На основу претходно изложених теоријских основа (поглавља 2, 3 и 4) за све три методе овог рада, срачунати су максимални позитивни и негативни моменти за дати пример и на сликама 8 и 9 приказани упоредни резултати.



Слика 8 Упоредни приказ максималних позитивних момената савијања M_{12} за све три методе и за распоне плоче 5,00 – 10,00 m



Слика 9 Упоредни приказ максималних негативних момената савијања M_2 за све три методе и за распоне плоче 5,00 – 10,00 m

6. ЗАКЉУЧАК

Разлике у вредностима момената савијања су очекиване и последица су усвојених претпоставки и поједностављења приликом прорачуна које користи свака од методе. За разлику од методе еквивалентних трака, у којој се моменти савијања

одређују преко утицаја у континуалним носачима, код методе линија лома значајну улогу за одређивање момената у пољу и над ослонцима имају вредности коефицијената i_1 и i_2 (дефинисани у табели 2) које пројектант усваја искуствено и према препорукама правилника, а које директно утичу на резултате ове методе. Hillerborg-ова и Wiesinger-ова метода, као и метода линија лома, даје неконзервативна решења у односу на еластично решење, при чему су разлике у моментима знатно мање у пољу него над ослонцем што је последица редуције момента приликом усвајања распореда Hillerborg-ових елемената. Суштинска разлика ових метода ипак се односи на прерасподелу момената савијања по тракама (слика 7) и начин армирања конструкције, где распоред и количина арматуре директно утичу на понашање конструкције у фази експлоатације.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Park, R., Gamble, W.L.: *Reinforced Concrete Slabs*, John Wiley & Sons INC, Toronto, **2000.**, стр. 205-303.
- [2] Hillerborg, A.: *Strip Method Design Handbook*, E&FN SPON, London, **2003.**, стр. 16-41.
- [3] Kennedy, G., Goodchild, C.H.: *Practical Yield Line Design*, The Concrete Centre, London, **2004.**, стр. 88-119.

REVIEW OF THE METHODS FOR ANALYSIS OF FLAT SLABS

Summary: *The paper analyzes the results of reinforced concrete flat slabs, using different methods based on the theory of elasticity and theory of plasticity. Were considered three methods: stripe method, method according to Hillerborg and Wiesinger and Yield Line theory. The stripe method based on the theory of elasticity and is one of the most commonly used methods for calculation flat slabs, which are recommended by many regulations for calculation reinforced concrete structures. This paper also presents two methods based on the theory of plasticity, the method according to Hillerborg and Wiesinger - lower bound and Yield Line theory - upper bound, which uses a solutions of Johansen. Solutions obtained by these methods define limits interval of critical load. Review the basic theoretical hypothesis of all these methods and their application to flat slabs. Conducted calculation according to Eurocode 2 with a regular arrangement of pillars, analyzed the results and commented differences that occur as a result of the adoption of various hypothesis.*

Keywords: *flat slabs, theory of elasticity, theory of plasticity, strip method, method according to Hillerborg and Wiesinger, Yield Line theory.*