

ЕЛАСТОПЛАСТИЧНА АНАЛИЗА АБ ЗИДА СА ОТВОРИМА

Жарко Лазић¹

Јовица Станојевић²

Марио Бабић³

УДК: 539.3:624.012.45

DOI:10.14415/konferencijaGFS 2015.040

Резиме: У пракси се свакодневно материјали и конструкције у прорачунима третирају са претпоставком да посједују својство еластичности, што није увијек случај. Постоји мноштво материјала који немају или пак имају својство еластичности само до одређеног нивоа напонског стања, те као такви подлијежу анализи Теорије пластичности. С тога је у раду бачен акценат на еластопластично понашање материјала. Описан је равански случај за дводимензионалну анализу равнoг стања напона. У програском пакету Софистик анализирани су примјери укљештених армирано-бетонских зидова са отворима, бочно притиснути. Усвојене су карактеристике материјала према европским нормама. Резултати за сваки модел су представљени графички.

Кључне речи: Теорија пластичности, еластопластично понашање, равно стање напона, аб зидови са отворима, Софистик

1. УВОД

Као што је познато у пракси се материјали и конструкције у свакодневним прорачунима узимају са претпоставком да посједују својство еластичности. Међутим, као што је то добро познато, то није увијек случај. Постоји мноштво материјала који немају својство еластичности или пак својство имају само до одређеног нивоа напонског стања. Појава трајних пластичних деформација карактеристична је за општи вид деформације конструкција изложених дејству спољашњих утицаја. У оквиру Механике деформабилних тијела, област која се бави изучавањем напонско-деформацијских стања материјала са пластичним својствима назива се *Теорија пластичности*. Њен развој почео је приближно у исто вријеме када и развој Теорије еластичности. Ипак, развој *Теорије пластичности* ишао је знатно спорије, због сложености физике самог феномена пластичности, као и због знатно комплекснијег математичког апарата којим се он описује. [3]

¹Жарко Лазић, дипл. инж. грађ., студент докторских студија, Грађевински факултет Универзитета у Београду, e-mail: zarkolazic87@live.com

²Јовица Станојевић, дипл. инж. грађ., e-mail: stanojevic.j@gmail.com

³Марио Бабић, дипл. инж. грађ., e-mail: mbabic.mailbox@gmail.com

2. ОСНОВА ТЕОРИЈЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

Сам предмет проучавања *Теорије пластичности* су везе између напона и деформација за материјале који имају својство пластичности. Пластична својства материјала карактеришу се реверзибилним деформацијама, које нису зависне од времена. Поред конститутивних веза којима се описује понашање материјала у домену еластичности, односно до појаве пластичних деформација, за описивање *еластопластичног понашања* материјала неопходно је да се још зна:

1) *Услов течења (a yield conditions)* којим се дефинише напонско стање у тренутку почетка пластичних деформација.

2) *Закон течења (a flow rule)* којим се дефинише веза инкременталних деформација и напона за стање које настаје после појаве пластичних деформација.

3) *Закон ојачања (a hardening rule)* којим се дефинише начин на који се услов пластичности модификује у току процеса пластичног течења. [1]

3. ДВОДИМЕНЗИОНАЛНИ ПРОБЛЕМИ

Општи изрази теорије пластичности који су изведени за потребе тродимензионалне анализе, у случају дводимензионалних проблема се редукују и самим тим постају знатно једноставнији. Модификација општих израза за три основна подручја дводимензионалне анализе (равно стање напона, равно стање деформације, осно-симетрични проблеми) приказана је у табели (Таб.1).

Ради једноставније формулације за све три области дводимензионалних проблема, у табели (Таб.1), вектор напона је проширен на четири компоненте, иако се у случају равнoг стања напона и равнoг стања деформације појављују само три међусобно независне компоненте. Код рачунања матрице крутости елемента, о овој околности се води рачуна, тако да се матрица крутости у поменутиим случајевима редукује на 3x3. Вектор течења у случају дводимензионалних проблема се дефинише као [2]:

$$a^T = \left(\frac{dF}{d\sigma_x}, \frac{dF}{d\sigma_y}, \frac{dF}{d\tau_{xy}}, \frac{dF}{d\sigma_z} \right) \quad (1)$$

Еласто-пластична модуларна матрица D_{ep} формира се према изразу

$$D_{ep} = D_e - D_p = D - \frac{(D_a)(D_a)^T}{A + a^T D_a}. \quad (2)$$

За конститутивну матрицу D треба узети вриједности из (Таб.1), а вектор a према изразу (1), тако да се за производ D_a који се јавља у матрици D_{ep} добијају експлицитне вриједности:

- а) за равно стање напона б) за стање равне деформације или основно-симетричне проблеме

$$D_a = \begin{bmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + \frac{E\nu(a_1+a_2)}{1-\nu^2} \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + \frac{E(a_1+a_2)}{1-\nu^2} \\ Ga_3 \\ \frac{E}{1+\nu} a_4 + \frac{E\nu(a_1+a_2)}{1-\nu^2} \end{bmatrix}; \quad D_a = \begin{bmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + \frac{E\nu(a_1+a_2+a_4)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + \frac{E\nu(a_1+a_2+a_4)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ Ga_3 \\ \frac{E}{1+\nu} a_4 + \frac{E(a_1+a_2+a_4)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{bmatrix} \quad (3,4)$$

У изразима (3) и (4), $a_i, i = 1, 2, 3, 4$ су компоненте вектора a .

Таб.1 [2]

	$\sigma^T = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z)$ $\sigma_z = 0$	$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\sigma^T = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z)$ $\varepsilon_z = 0$	$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\sigma^T = (\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_\theta)$	

4. НУМЕРИЧКИ ПРИМЈЕР

Анализирана су армирано-бетонска зидна платна као примјер из домена равнoг стања напона. На три различита примјера у зависности од положаја и геометрије отвора урађена је параметарска анализа. Прорачун је урађен у програмском пакету *SOFISTIK*. Својства усвојених материјала:

Бетон (према *DIN/EN 1992-2004*) С 30/37:

Модул еластичности $E = 28613 \text{ N/mm}^2$

Поасонов коефицијент $\mu = 0.15$

Модул смицања $E = 12440 \text{ N/mm}^2$

Запреминска тежина $\gamma = 25.00 \text{ kN/m}^3$

Чврстоћа на притисак $f_c = 25.50 \text{ N/mm}^2$

Чврстоћа на затезање $f_t = 2.03 \text{ N/mm}^2$

Челик (према *DIN/EN 1992-2004*) Y 500:

Модул еластичности $E = 201300 \text{ N/mm}^2$

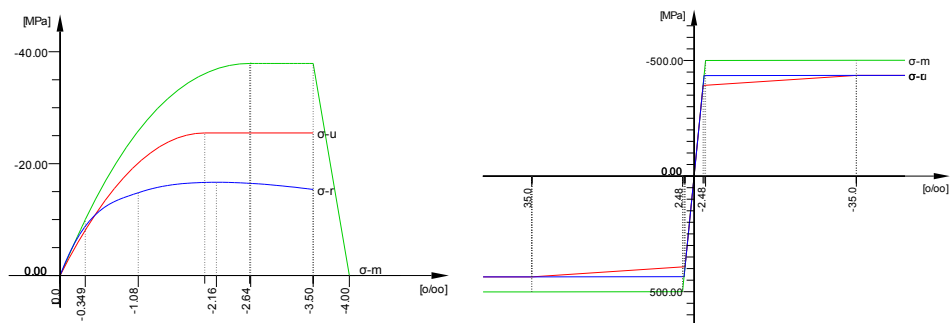
Поасонов коефицијент $\mu = 0.3$

Модул смицања $E = 77423 \text{ N/mm}^2$

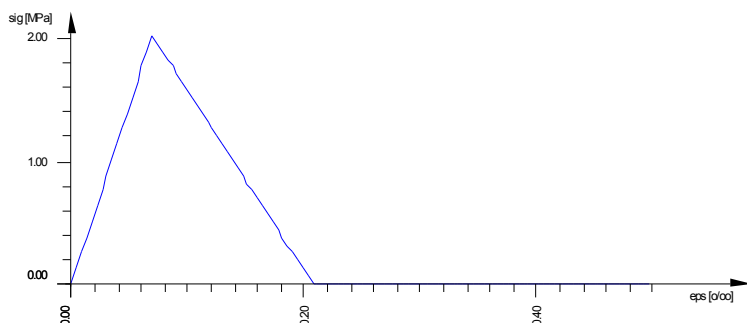
Запреминска тежина $\gamma = 78.50 \text{ kN/m}^3$

Гранична деформација $\varepsilon_{ult} = 350 / 1000$

Граница развлачења $f_y = 500 \text{ N/mm}^2$



Слика 1. Радни дијаграми бетона и арматуре кориштени у анализи [5]



Слика 2. Радни дијаграма бетона у фази затезања [5]

Прорачун у програму *SOFISTIK* се заснива на *методи коначних елемената (МКЕ)*. Базира се на *методи деформације*, што значи да су непознате величине уствари деформације тачака, односно чворова коначних елемената, и оних тачака које се налазе између њих, а чије вриједности тражимо преко интерполационих функција које могу бити линеарног, квадратног, кубног или вишег реда. У конкретној анализи су кориштени изопараметарски квадратни елементи са линеарном интерполацијом (4 чвора). Одређивање механичких особина засновано је на енергетском принципу (*минимуму деформационог рада*). Комплетан прорачун према *МКЕ* се може подијелити у неколико дијелова [5]:

1. *Одређивање локалне матрице крутости елемента.*
2. *Асемблирање глобалне матрице крутости и дефинисање коначне једначине система.*
3. *Дефинисање матрице оптерећења и одређивање одговарајућих помјерања.*
4. *Одређивање напона у елементу и реакција ослонаца на основу срачунатих помјерања.*

Нелинарни ефекти се анализирају итеративно (модификована *Newton-Raphson*-ова метода). Кориштени су *QUAD-shell* елементи који су дефинисани преко *layers*-а и као такви су погодни за дефинисање материјала као што је армирани бетон [5].

Усвојени типови оптерећења:

Actions				γ_u	γ_f	γ_a	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_1'
type	part	sup	title							
G	G	perm	Dead load	1.35	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Q	Q	cond	Live load	1.50	0.00	1.00	0.70	0.50	0.30	1.00

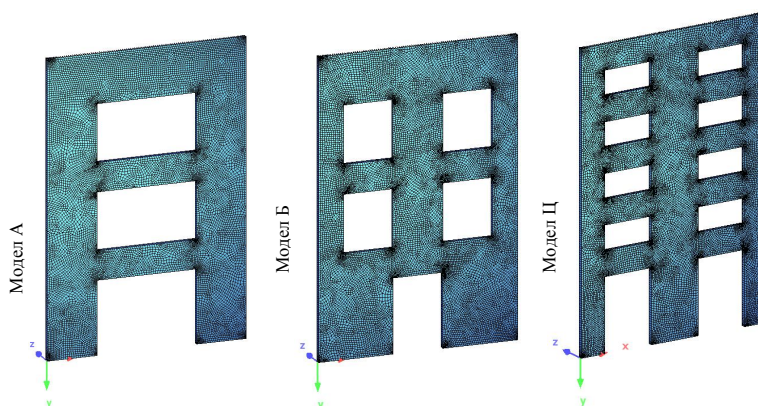
Усвајање арматуре:

Reinforcement parameter two layer reinforcement											
Selection Grp elem no. no.	distance		bar-diameter		crackwidth		steelstress		min.feinf.		
	d1-u [mm]	2.lay [mm]	ds-u [mm]	2.lay [mm]	wk-u [mm]	2.lay [mm]	sigsu [MPa]	2.lay [MPa]	asu [cm ² /m]	2.lay [cm ² /m]	
default	35.0	45.0	12	12	0.20	0.20	435.00	435.00	10.00	10.00	
	35.0	45.0	12	12	0.20	0.20	435.00	435.00	10.00	10.00	

Прорачун је рађен према *DIN-EuroNorm EN 1992(2013) Concrete Structures [4]*:

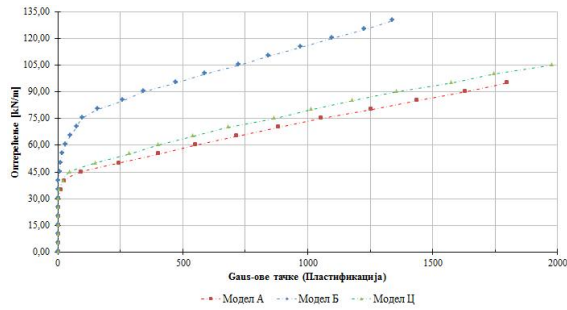
Nonlinear properties concrete law for shell elements			
General parameter:	max.shear Tau-02	2.4	[MPa]
	number of layers	10	[-]
Tension stiffening according to EC2 of year 1992			
Analysis of crack width according EN-1992-1-1 7.3.4			

Габарити свих модела су 15x10 [m] (висина/ширина), величина и распоред оствора је промјенљив што и представља основну разлику између модела. Дебљина зида је 0.20 [m]. Мрежа коначних елемената се састоји од правоугаоних 4-nodes елемената са билинеарном интерполацијом. Геометријска толеранција 0.01 [m]. Број коначних елемената модела А је 11329, а број *Gaus*-ових тачака 56645, модела Б је 13508, а број *Gaus*-ових тачака 67540 и модела Ц је 15179 са 75895 *Gaus*-ових тачака. Модели су анализирани на бочни притисак вјетра, као равномјерно расподијељено оптереће дуж комплетне висине зида. У анализу је укључена и сопствена тежина зида.

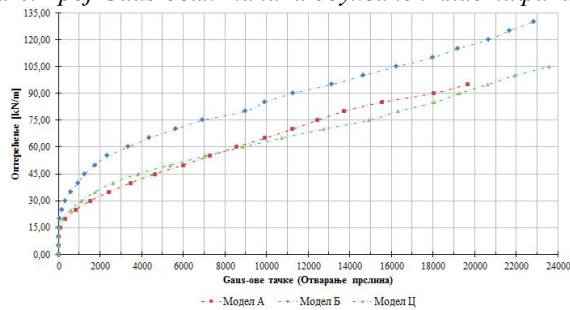


Слика 3. Нумерички модели аб зидова

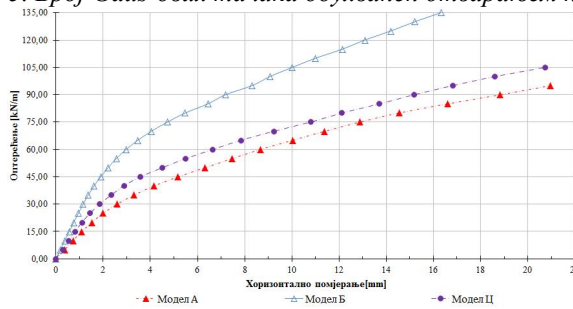
Резултати:



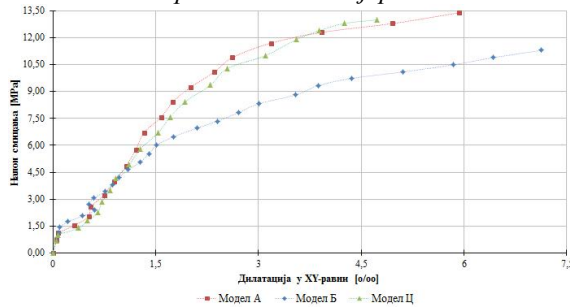
Слика 4. Број Гаус-ових тачака обухваћен пластификацијом



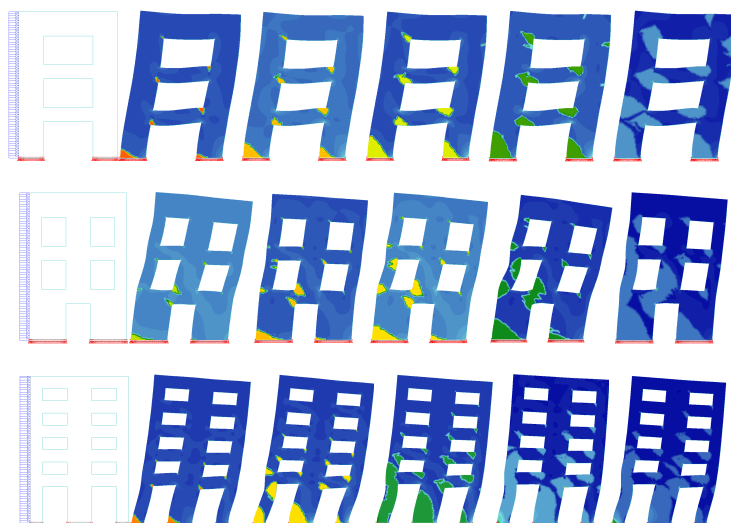
Слика 5. Број Гаус-ових тачака обухваћен отварањем прелина



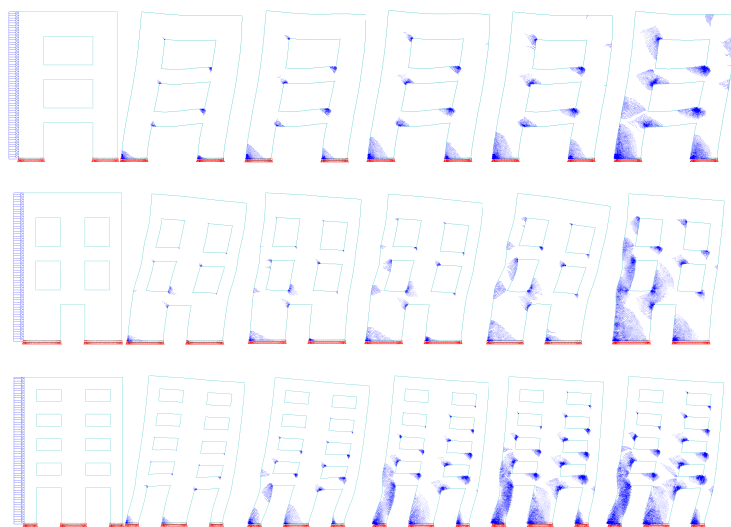
Слика 6. Хоризонтално помјерање тачке А



Слика 7. Напон смицања у функцији дилатације у ХУ-равни



Слика 8. Анимација развоја зона пластификације



Слика 9. Анимација развоја зона прслина

5. ЗАКЉУЧАК

Из претходних примјера се може видјети да се при нелинеарној анализи због комплексности једначина у зонама платификације, не може наћи рјешење у затвореном облику, те је с тога потребно прибјећи неким нумеричким методама. Као што је показано, то се данас лако рјешава употребом моћних програмских

пакета. У коначним резултатима се може видјети присуство материјалне нелинеарности узете у обзир према улазним параметрима материјала. Константним повећањем оптерећења, видљива је на *Guas*-овим тачкама брзина развоја зона пластификације, као и отварања прелина. У погледу геометрије може се уочити колико и на који начин геометрија отвора у зиду утиче на напонско-деформацијска својства самог зида. Може се јасно уочити развој зона пластификације у одређеним подручјима. Одређени дјелови конструкције су ушли у зону пластификације, док се остали још увијек налазе у зони еластичности, што указује на еластопластично понашање комплетне конструкције.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] KJ Bathe, *Finite element procedures*, "Prentice Hall", New Jersey, САД, **1996**
- [2] M Sekulović, *Metod konačnih elemenata*, Građevinska knjiga, Beograd, **1988**
- [3] R De Borst, *The zero-normal-stress condition in plane-stress and shell elastoplasticity*, Communications in applied numerical methods, Vol. 7, 29-33, Delft, Холандија, **1991**
- [4] The EU Regulation, *EN 1992-1-1 (2004) (English): Eurocode 2: Design of concrete structures Part 1-1: General rules and rules for buildings*, **2004**
- [5] SOFiSTiK AG, *SOFiSTiK Manuals, Ver.2014.3*, Oberschleissheim, ГЕР, **2013**

ELASTOPLASTIC ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE WALL WITH OPENINGS

Summary: *In practice, every day materials and structures in the calculations are treated with the assumption that they possess the property of elasticity, which is not always the case. There are plenty of materials that are/or have the property of elasticity only to a certain level of stress state, and as such, they are subject to analysis of the Theory of plasticity. Therefore, in the work, review is on the elastoplastic material behavior. It is described the plane case for two-dimensional analysis of plane stress. In software package Sofistik it is analyzed examples of fixed rc walls with openings, laterally press. They adopted the characteristics of the material according to European norms. Results for each model are presented graphically.*

Keywords: *Theory of Plasticity, elastoplastic behavior, plane stress state, rc walls with openings, Sofistik*